Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kurs given HT 2018

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall, gradskiva och linjal			
Skrivtid:	2019-04-24, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Beräkna följande integraler:

a)

$$\int 5x\cos x\,dx$$

Ledning: Partiell integration ger svaret $5x\sin x + 5\cos x + C$

b)

$$\int 8x\,e^{x^2}dx$$

Ledning: Substitution eller kedjeregeln baklänges ger svaret $4e^{x^2} + C$

c)

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

Ledning: Utbrytning som omvandlar fyran till en etta ger svaret $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

(3 p)

2. Tre (av fyra) sidor hos en rektangel har den totala längden 120 m. Beräkna rektangelns maximala area.

(3 p)

Ledning: Funktionen $A(x) = x(120 - 2x)$ har stationär punkt med maximum i punkten $x = 30$ m som ger den maximala arean 1800 m^2.

3. Bestäm k och m så att funktionen $f(x)$ blir både kontinuerlig och deriverbar:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 2 \\ kx + m & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Ledning: Ändpunkten för den vänstra ”delfunktionen” är $(2, 4)$ och *derivatans definition* ger vänsterderivatan = 4 i denna punkt. Denna vänsterderivata måste stämma med den högra ”delfunktionens” riktningskoefficient. Insättning av dessa värden ($x = 2, y = 4$ och $k = 4$) i räta linjens ekvation $y = kx + m$ ger den högra delfunktionen $y = 4x - 4$

(3 p)

4. Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{(e^{4x} - 1) \arctan 5x}$$

Ledning: Standardgränsvärden ger svaret $\frac{1}{10}$

b)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{3x}$$

Ledning: Utbrytning av $|x|$ ger svaret $-\frac{1}{3}$

3 p

5. Medelvärdessatsen för derivator

a) Vad säger satsen?

Ledning: Se Sats 4.10 i läroboken

b) Visa med hjälp av skiss och beräkningar varför satsen inte gäller för funktionen

$$f(x) = |x|$$

Ledning: Funktionen $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{för } x \geq 0 \\ -x & \text{för } x < 0 \end{cases}$ är deriverbar med derivatan ± 1 i alla punkter förutom i $x = 0$ där derivata saknas. Genom att välja satsens $x = a$ och $x = b$ på var sin sida om $x = 0$ får man en differenskvot $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ som omöjligt kan få anta värdena ± 1 som är de enda existerande värdena för $f'(\xi)$. Därmed gäller ej satsen för denna funktion.

(3 p)

6. Funktionen

$$f(x) = x \arctan x$$

har endast en stationär punkt.

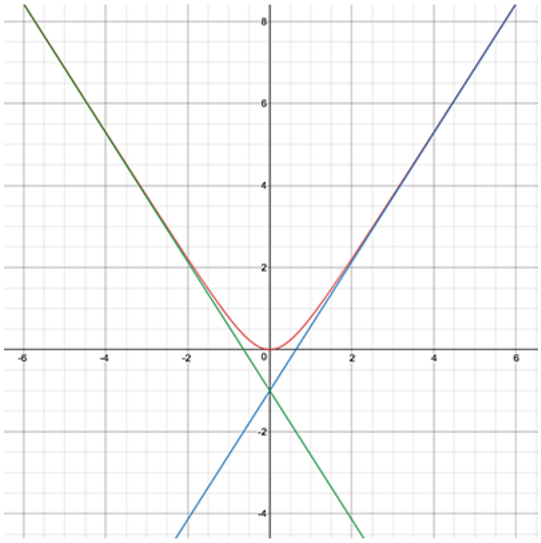
a) Bestäm funktionens sneda asymptoter.

Ledning: $\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = \cdots = -1$

Lösningstips: Sneda asymptoter bestäms på samma sätt som i Exempel 3.36 i läroboken och man får $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ till höger och $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ till vänster med hjälp av ledningen ovan.

b) Skissa funktionens kurva med tillhörande asymptoter.

Ledning: Enklare värdetabell ger



(3 p)

7. Bestäm funktionens värdemängd:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\sqrt{x} + \arctan x \quad , \quad x > 0$$

Ledning: För $x > 0$ gäller att $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{1+x^2} = \cdots = \frac{x^3+x-2}{2x^2(1+x^2)} = 0$ endast för $x = 1$ som därmed är den enda stationära punkten. Singulära punkter saknas då $f'(x)$ också är definierad för alla $x > 0$. Ändpunkter saknas. Vidare gäller att $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ (en följd av Sats 3.13) och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Teckenstudie av derivatan visar att minimum antas i $x = 1$ så att

$$V_f = \left[1 + \frac{\pi}{4}, \infty\right[$$

(3 p)