Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2018

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1 inom ett år tillbaka			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2019-08-20, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Låt

$$f(x) = \frac{4 - x + x^2}{x}$$

a) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips:

Höger- och vänstergränsvärde mot origo ger lodrät asymptot $x = 0$

Polynomdivision ger $f(x) = \frac{4}{x} - 1 + x$ närmar sig den sneda

asymptoten $y = x - 1$ då $x \to \pm\infty$

b) Beräkna samtliga stationära punkter.

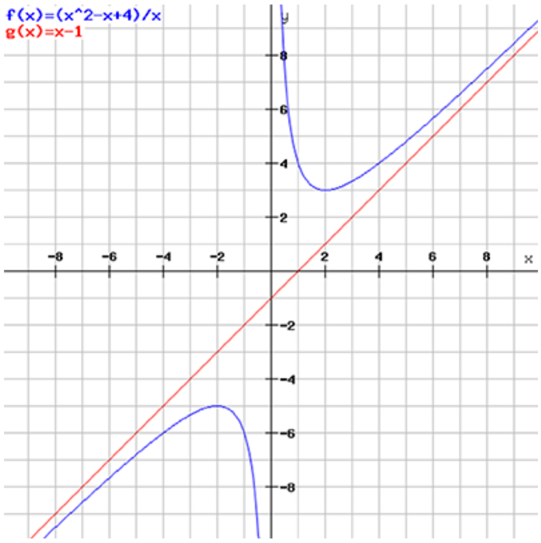
Lösningstips:

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ ger stationära punkter i $x = \pm 2$

c) Skissa grafen med tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Asymptoter, stationära punkter samt ytterligare punkter med hjälp av värdetabell ger följande skiss:



(3 p)

2. Lös följande obestämda integraler:

a)

$$\int 8x \cos x \, dx$$

Lösningstips: Partiell integration ger

$8x \sin x + 8 \cos x + C$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Lösningstips: Derivatan av nämnaren i täljaren ger

$\ln|\sin x| + C$

b)

$$\int (\cos(\tan x))(1/\cos^2 x) \, dx$$

Lösningstips: Substitution $y = \tan x$ eller kedjeregeln baklänges ger svaret $\sin(\tan x) + C$

(3 p)

3.

a) Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition om

$$f(x) = x^4 + \ln 3x$$

Lösningstips: Derivatans definition och två standardgränsvärden ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^4 + \ln 3(x+h)\right) - (x^4 + \ln 3x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} + \frac{\ln(3x+3h) - \ln 3x}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} + \frac{\ln \frac{3x+3h}{3x}}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 + \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{sgv} \frac{1}{x} \right) = 4x^3 + \frac{1}{x}$$

b) Bestäm $f'(x)$ om

$$f(x) = \arctan x$$

med hjälp av den kända derivatan till funktionens invers.

Lösningstips:

$$y = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x \quad \text{för} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

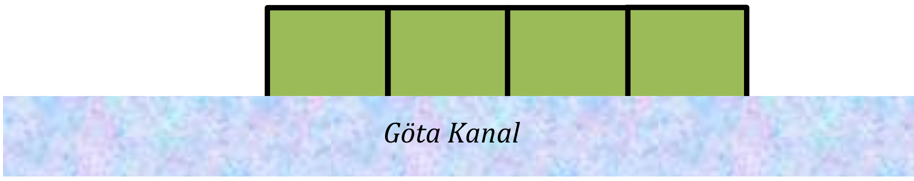
Derivering ledvis enligt kedjeregeln ger

$$(1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\underbrace{1 + \tan^2 y}_{>0}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

(3 p)

4. En fårhage med fyra lika stora ytor, utmed Göta kanal, skall ha taggtråd till en långsida och fem kortsidor enligt:



Bestäm hagens maximala area om taggtrådens totala längd är 600 m.

Lösningstips:

$A(x) = x(600 - 5x) = 600x - 5x^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 120$

$A'(x) = 600 - 10x = 0 \quad \text{för} \quad x = 60$

Den stationära punkten och ändpunkterna kontrolleras genom teckenstudium och globalt maximum fås för $x = 60$.

$A(60) = 60 \cdot 300 = 18\,000$

Svar: 18 000 m²

(3 p)

5. Funktioner och begrepp

a) Ge exempel på en funktion som har $f''(1) = 0$ utan att $x = 1$ är en inflexionspunkt, motivera ditt svar.

Svar: Till exempel $f(x) = (x-1)^4$ med $f''(x) = 12(x-1)^2$ har $f''(1) = 0$ utan att $f''(x)$ skiftar tecken i $x = 1$ och är positiv för alla andra värden.

b) Ge exempel på en funktion som har olika vänster- och högerderivata i $x = 1$, motivera ditt svar.

Svar: Till exempel $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x \geq 0 \\ 1-x & , \quad x < 0 \end{cases}$ som har högerderivatan 1 och vänsterderivatan -1 för $x = 1$

c) Ge exempel på en funktion saknar både vänster- och högerderivata i $x = 1$, motivera ditt svar.

Svar: Till exempel $f(x) = \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{3}}$ är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$ men

tillhörande $f'(x) = \frac{(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{3} = \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ är ej definierad i just $x = 1$.

(3 p)

6. Visa att funktionen har minst en stationär punkt:

$$f(x) = \arcsin x - 2\arctan x + e^{x^2} \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

(3 p)

Lösningstips:

Man noterar att ändpunkterna ger lika funktionsvärde $f(-1) = f(1) = e$.

Dessutom är funktionen $f(x)$ deriverbar på hela intervallet.

Enligt Rolles sats (villkoren är uppfyllda enligt ovan) gäller att det

finns minst en inre punkt $x = \xi$ inom intervallet $]-1, 1[$ sådant att

$f'(\xi) = 0$

och därmed har funktionen ovan minst en stationär punkt.

7. Para ihop funktion (a-d) med korrekt påstående (i-iv) genom att studera lämpliga gränsvärden:

a) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan\frac{1}{x} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x^2} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} x \arctan\frac{1}{x} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & , \; x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \; x = 0 \end{cases}$$

i) Varken höger- eller vänsterkontinuerlig i $x = 0$ och därmed inte deriverbar i $x = 0$

ii) Kontinuerlig och deriverbar i $x = 0$

iii) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$ och därmed inte deriverbar i $x = 0$

iv) Både höger- och vänsterkontinuerlig i $x = 0$ men inte deriverbar i $x = 0$

(3 p)

Lösningstips:

Funktion a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\text{begränsad}}=0$$

Detta visar att funktionen är deriverbar i $x=0$ (funktionen har till och med en stationär punkt i origo) och därmed är funktionen också kontinuerlig i $x=0$ då kontinuitet automatiskt följer om funktionen är deriverbar vilket är ett strängare krav.

Påstående ii) stämmer.

Funktion b)

$$\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}\neq f(0)$$

Detta visar att funktionen inte är kontinuerlig i $x=0$ och därmed inte heller är deriverbar i $x=0$ ty deriverbarhet är är ett strängare krav än kontinuitet.

Påstående i) stämmer.

Funktion c)

$$\lim_{x\to 0}x\underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\text{begränsad}}=0=f(0)$$

Detta visar att funktionen är kontinuerlig i $x=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$$

Man ser nu att $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ medan $\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

Alltså olika höger- och vänsterderivata i $x=0$.

Detta visar att funktionen inte är deriverbar i $x=0$.

Påstående iv) stämmer.

Funktion d)

$$\lim_{h\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}\neq f(0)$$

Detta visar att funktionen är högerkontinuerlig i $x=0$ men inte vänsterkontinuerlig i $x=0$ och därmed är funktionen inte heller deriverbar i $x=0$ då deriverbarhet är ett strängare krav än kontinuitet. Påstående iii) stämmer.