Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2019

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2020-01-16, kl. 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Låt $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x^2}$

a) Bestäm eventuella stationära punkter.

Lösningstips:

$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = 0$ ger $x = 2$

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips:

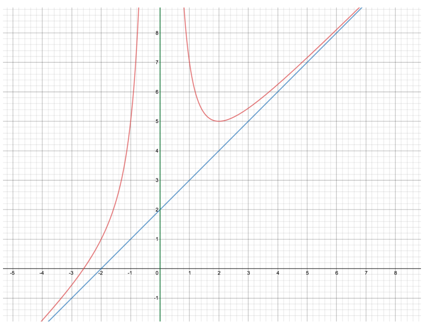
Gränsvärdesberäkningar för $x \to \pm\infty$ ger sned asymptot $y = x + 2$

och med $x \to 0^+$ respektive $x \to 0^-$ fås lodrät asymptot i just $x = 0$.

c) Skissa kurva med tillhörande asymptoter

Lösningstips:

Värdetabell tillsammans med informationen i a) och b) ger:



3 p

2. Lös de obestämda integralerna:

a)

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx$$

Lösningstips:

Substitutionen $y = \sin x$ eller kedjeregeln baklänges ger svaret $e^{\sin x} + C$

b)

$$\int e^x \sin x \, dx$$

Lösningstips:

Partiell integration ger efter två varv den ursprungliga integralen och då den löses ut får man svaret $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$.

c)

$$\int \frac{8x+2}{9+x^2} dx$$

Lösningstips:

$$\int \frac{8x+2}{9+x^2} dx = \cdots = 4\int \frac{2x}{9+x^2} dx + \frac{2}{9}\int \frac{x}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \cdots = 4\ln(9+x^2) + \frac{2}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$$

d)

3 p

3. Lös olikheten

$$\ln(x^2 - 16) - \ln(x+4) \leq 0$$

Lösningstips:

Vänsterledets logaritm kräver att $x^2 - 16 > 0 \iff (x+4)(x-4) > 0$

som efter teckenstudie ger kravet $x \in]-\infty, -4[\cup]4, \infty[$

Högerledets logaritm kräver att $x + 4 > 0$ som ger kravet $x \in]-4, \infty[$

Sammanfattningsvis (snittet) kräver VL och HL att $x > 4$.

Dags att lösa olikheten…

$$\ln(x^2 - 16) \leq \ln(x+4) \quad \text{för} \quad x > 4$$

$$\iff \quad e^{\ln(x^2-16)} \leq e^{\ln(x+4)} \quad \text{för} \quad x > 4$$

$$\iff \quad x^2 - 16 \leq x + 4 \quad \text{för} \quad x > 4$$

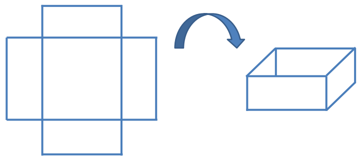
$$\iff \quad (x-5)(x+4) \leq 0 \quad \text{för} \quad x > 4$$

teckenstudie av $(x-5)(x+4) \leq 0$ ger förslaget $-4 \leq x \leq 5$

som i kombination med kravet $x > 4$ ger svaret $4 < x \leq 5$

3 p

4. En låda utan lock med kvadratisk bottenyta är gjord av kartong – se figur nedan. Beräkna den maximala volymen hos lådan om kartongens totala area 48 dm^2.



3 p

Lösningstips:

Om man döper lådans baskanter till x blir $B = x^2$.

Då återstår arean $48 - x^2$ till de fyra sidoytorna som vardera får arean $S = \frac{48-x^2}{4}$.

Varje sidoyta har måtten $S = xh$ och därmed blir höjden $h = \frac{48-x^2}{4x} = \frac{12}{x} - \frac{x}{4}$.

Lådans volym blir $V(x) = Bh = x^2\left(\frac{12}{x} - \frac{x}{4}\right) = 12x - \frac{x^3}{4}$ med $D_V = \left[0, \sqrt{48}\right]$

Derivering ger $V'(x) = 12 - \frac{3x^2}{4}$ som har nollställen $x = \pm 4$ varav den negativa ligger utanför D_V.
Teckenstudium visar att $x = 4$ ger ett globalt maximum med $V(4) = 4^2\left(\frac{12}{3} - \frac{4}{4}\right) = 32$ dm².

5. Bestäm k och m så att funktionen $f(x)$ blir deriverbar för $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & \text{för } x > 2 \\ kx + m & \text{för } x \leq 2 \end{cases}$$

3 p

Lösningstips:

För den övre delfunktionen gäller i skarven att $\lim\limits_{x \to 2^+} 6x - x^2 = 8$

För deriverbarhet krävs minst kontinuitet och därmed måste punkten $(2, 8)$ vara ändpunkt för den nedre delfunktionen och vara skarvpunkt mellan delfunktionerna.

Högerderivatan i skarven beräknas med hjälp av den övre delfunktionen tillsammans med den nedre delfunktionens ”lånade” ändpunkt:

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{6x - x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)}{x - 2} = \cdots = 2$$

Om vänsterderivatan skall bli densamma (krav för deriverbarhet) måste $k = 2$

Insättning av $k = 2, x = 2$ och $y = 8$ i $y = kx + m$ ger $m = 4$ så att

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & \text{för } x > 2 \\ 2x + 4 & \text{för } x \leq 2 \end{cases}$$

6. Teorifrågor:

a) Förklara med egna ord varför en funktion $f(x)$ måste vara deriverbar på det aktuella intervallet för att Rolles sats skall gälla?

Lösningstips:

Om man exempelvis studerar funktionen

$$f(x) = |x| \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

som inte är deriverbar i origo men har samma funktionsvärde i ändpunkterna (krav enligt Rolles sats) så upptäcker man att funktionen saknar punkt med $f'(x) = 0$. Alltså kan man inte strunta i kravet på deriverbarhet inom det aktuella intervallet när Rolles sats skall användas.

b) Förklara hur man ser att $f(x) = x^4$ inte har en inflexionspunkt i origo trots att $f''(x) = 0$ i origo.

Lösningstips:

Funktionens andraderivata $f''(x) = 12x^2$ och är positiv i varje omgivning till origo och skiftar därmed inte tecken i origo.

c) Visa med hjälp av lämplig sats att funktionen

$$f(x) = 4\arctan x - 2\arcsin x + 2x \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

har minst en inre punkt x med $f'(x) = 2$.

Lösningstips:

Funktionen är deriverbar på hela det aktuella intervallet och därmed kan vi tillämpa exempelvis medelvärdessatsen för derivata. Lutningen mellan funktionens ändpunkter beräknas:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{\left(4\frac{\pi}{4} - 2\frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left(4\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2(-1)\right)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Därmed gäller enligt medelvärdessatsen för derivata att $f'(x) = 2$ i minst en inre punkt av det aktuella intervallet, vilket skulle visas.

3 p

7. Para ihop funktionerna till vänster med korrekt påstående till höger genom att studera lämpliga gränsvärden:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \ x \geq 0 \\ 2x+1 & , \ x < 0 \end{cases}$

i) Varken höger- eller vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

ii) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

iii) Kontinuerlig i $x = 0$, men inte deriverbar i $x = 0$

iv) Deriverbar i $x = 0$ och därmed även kontinuerlig i $x = 0$

(3 p)

Lösningstips:

a = ii eftersom att $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 = f(0)$ (högerkontinuerlig) medan $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-1/x} = \infty \neq f(0) = 0$ (ej vänsterkontinuerlig)

b = i eftersom att $\lim\limits_{x \to 0} e^{1/x^2} = \infty \neq f(0) = 0$

c = iv eftersom att funktionen är uppenbart deriverbar i alla inre punkter samt att

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \cdots = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x e^{1/x^2}} = \left| \begin{matrix} \text{enligt} \\ \text{hastighetstabellen} \end{matrix} \right| = 0 = \text{ändligt värde}$$

d = iii eftersom att högerderivatan

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ldots \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = |\text{sgv}| = 1 \text{ medan vänsterderivatan} = k = 2$$