Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2019

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2020-03-17, kl. 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Beräkna följande integraler:

a)

$$\int e^x \sin x \, dx$$

Ledning: Partiell integration ger svaret $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

b)

$$\int 8x\, e^{x^2} dx$$

Ledning: Substitution eller kedjeregeln baklänges ger svaret $4e^{x^2} + C$

c)

$$\int \frac{6}{9 + x^2} dx$$

Ledning: Utbrytning som omvandlar åttan till en etta ger svaret $2 \arctan \frac{x}{3} + C$

(3 p)

2.

a) Bestäm $f'(x)$med hjälp av derivatans definition om

$$f(x) = e^{5x} + \ln 5x$$

Lösningstips: Derivatans definition och två standardgränsvärden ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{5(x+h)} + \ln 3(x+h)\right) - \left(e^{5x} + \ln 5x\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{5x+2h} - e^{5x}}{h} + \frac{\ln(5x+5h) - \ln 5x}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{5x}\left(e^{5h} - 1\right)}{h} + \frac{\ln \frac{5x+5h}{5x}}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(5e^{5x} \underbrace{\frac{\left(e^{5h} - 1\right)}{5h}}_{sgv} + \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{sgv} \frac{1}{x}\right) = 5e^{5x} + \frac{1}{x}$$

Bestäm $f'(x)$ med hjälp av den kända derivatan till funktionens invers om

$$f(x) = \arcsin x$$

Lösningstips:

$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x \quad \text{för} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Derivering enligt kedjeregeln ger

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\underbrace{\cos y}_{>0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(3 p)

3. Beräkna gränsvärdena:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{12x^2}$$

Förlängning med täljarens konjugat och trigettan ger gränsvärdet $\frac{1}{6}$

b)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-6x}}{x+2}$$

Utbrytning av det dominerande ger gränsvärdet -1

c)

$$\lim_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{1}{2x}}$$

Standardgränvärdet för e ger svar: e^3

3 p

4. Låt

$$f(x)=\frac{x^3}{x^3+1}$$

a) Beräkna eventuella stationära punkter.

Lösningstips: $f'(x)=\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}=0$ för $x=0$, teckenstudium av derivatan visar att den stationära punkten är en terrasspunkt eftersom att derivatan är positiv runt $x=0$.

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips: Gränsvärdesstudie – på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken – ger vågrät asymptot $y=1$. Detta kan också inses m.h.a. följande omskrivning

$$f(x)=\frac{x^3}{x^3+1}=\frac{x^3+1-1}{x^3+1}=1-\frac{1}{x^3+2}\to 1 \text{ då } x\to\pm\infty$$

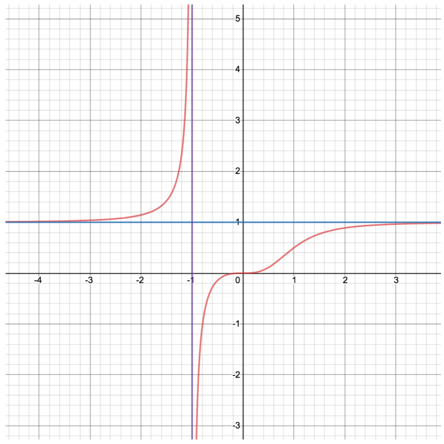
eller genom att bryta ut den dominerande faktorn x^3 och studera gränsvärden.

Ytterligare gränsvärdesstudier då $x\to -1^+$ och $x\to -1^-$ ger lodrät asymptot $x=-1$.

c) Skissa grafen

Lösningstips: Teckenstudie av derivatan från a), asymptoter från b) samt värdetabell ger följande graf:

Svar:



(3 p)

5. Komplettera följande påståenden med någon passande slutsats, t.ex. från någon sats i läroboken:

a) Om funktionerna $f(x) \to A$ och $h(x) \to A$ då $x \to a$ samt $f(x) < g(x) < h(x)$ gäller att…

Lösningstips: Exempelvis fortsättning enligt *följdsatsen* till Sats 3.3 som säger att genom instängning gäller då att även $g(x) \to A$ då $x \to a$.

b) Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $x \in [a, b]$ och deriverbar på åtminstone intervallet $x \in \,]a, b[$ samt $f(a) = f(b)$ gäller att…

Lösningstips: Exempelvis fortsättning enligt Sats 4.11 Rolles Sats som säger att då finns minst en stationär punkt inom $x \in \,]a, b[$.

c) Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $x \in [a, b]$ och $f(a) \neq f(b)$ så gäller att…

Lösningstips: Exempelvis fortsättning enligt Sats 3.9 som säger att alla då antas alla funktionsvärden mellan $f(a)$ och $f(b)$ minst i minst en punkt inom $x \in \,]a, b[$.

(3 p)

6. Skissa kurvor och para ihop funktion med tillhörande påstående:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , \ 2 < x \leq 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & , \ 2 < x \leq 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , \ 1 < x \leq 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & , \ 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & , \ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

i) Funktionen är kontinuerlig, strängt monoton och har kontinuerlig invers.

ii) Funktionen är kontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers.

iii) Funktionen är kontinuerlig, är strängt monoton och har diskontinuerlig invers.

iv) Funktionen är diskontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers.

v) Funktionen är diskontinuerlig, är strängt monoton och har kontinuerlig invers.

(3 p)

Svar: $a = iii, \ b = ii, \ c = v, \ d = i \ \text{och} \ e = iv$

7. Visa att funktionen har minst en stationär punkt:

$$f(x) = 4\arctan x + 2\arccos x + \ln(2 - x^2)$$

(3 p)

Lösningstips:

$D_f = [-1, 1]$ eftersom att $\arccos x$ har snävast definitionsmängd och den ryms innanför de andra delfunktionernas definitionsmängder.

Man noterar att ändpunkterna ger lika funktionsvärde $f(-1) = f(1) = \pi$.

Dessutom är funktionen $f(x)$ deriverbar på hela definitionsmängden.

Enligt Rolles sats (villkoren är uppfyllda enligt ovan) gäller att det finns minst en inre punkt $x = \xi$ inom intervallet $]-1, 1[$ sådant att

$$f'(\xi) = 0$$

och därmed har funktionen minst en stationär punkt, vilket skulle visas.