

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsninganteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsninganteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2019

Utbildningskod: TNIU22
Modul: TEN1
Max: 21 p
Betygsgränser: Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus: 0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel: Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid: 2020-03-17, kl. 08:00–13:00
Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1. Beräkna följande integraler:

a)

$$\int e^x \sin x \, dx$$

Ledning: Partiell integration ger svaret $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

b)

$$\int 8x e^{x^2} \, dx$$

Ledning: Substitution eller kedjeregeln baklänges ger svaret $4e^{x^2} + C$

c)

$$\int \frac{6}{9 + x^2} \, dx$$

Ledning: Utbrytning som omvandlar åttan till en etta ger svaret $2 \arctan \frac{x}{3} + C$

(3 p)

2.

a) Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition om

$$f(x) = e^{5x} + \ln 5x$$

Lösningstips: Derivatans definition och två standardgränsvärden ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{5(x+h)} + \ln 3(x+h)) - (e^{5x} + \ln 5x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x+2h} - e^{5x}}{h} + \frac{\ln(5x+5h) - \ln 5x}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x}(e^{5h} - 1)}{h} + \frac{\ln \frac{5x+5h}{5x}}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(5e^{5x} \underbrace{\frac{(e^{5h} - 1)}{5h}}_{sgv} + \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} \right) = 5e^{5x} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Bestäm $f'(x)$ med hjälp av den kända derivatan till funktionens invers om

$$f(x) = \arcsin x$$

Lösningstips:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x \quad \text{för } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Derivering enligt kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \cos y \frac{dy}{dx} = 1 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\underbrace{\cos y}_{>0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

(3 p)

3. Beräkna gränsvärdena:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{12x^2}$$

Förlängning med täljarens konjugat och triggettan ger gränsvärdet $\frac{1}{6}$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 6x}}{x + 2}$$

Utbygning av det dominerande ger gränsvärdet -1

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 6x)^{\frac{1}{2x}}$$

Standardgränsvärdet för e ger svar: e^3

3 p

4. Låt

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 1}$$

a) Beräkna eventuella stationära punkter.

Lösningstips: $f'(x) = \frac{3x^2}{(x^3+1)^2} = 0$ för $x = 0$, teckenstudium av derivatan visar att den stationära punkten är en terrasspunkt eftersom att derivatan är positiv runt $x = 0$.

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips: Gränsvärdesstudie - på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken - ger vågrät asymptot $y = 1$. Detta kan också inses m.h.a. följande omskrivning

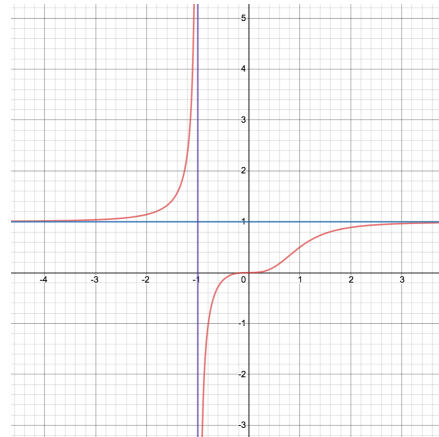
$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 + 1} = \frac{x^3 + 1 - 1}{x^3 + 1} = 1 - \frac{1}{x^3 + 1} \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow \pm\infty$$

eller genom att bryta ut den dominerande faktorn x^3 och studera gränsvärden. Ytterligare gränsvärdesstudier då $x \rightarrow -1^+$ och $x \rightarrow -1^-$ ger lodrät asymptot $x = -1$.

c) Skissa grafen

Lösningstips: Teckenstudie av derivatan från a), asymptoter från b) samt värdetabell ger följande graf:

Svar:



(3 p)

5. Komplettera följande påståenden med någon passande slutsats, t.ex. från någon sats i läroboken:

a) Om funktionerna $f(x) \rightarrow A$ och $h(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow a$ samt $f(x) < g(x) < h(x)$ gäller att...

Lösningstips: Exempelvis fortsättning enligt *följdsatsen* till Sats 3.3 som säger att genom instängning gäller då att även $g(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow a$.

b) Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $x \in [a, b]$ och deriverbar på åtminstone intervallet $x \in]a, b[$ samt $f(a) = f(b)$ gäller att...

Lösningstips: Exempelvis fortsättning enligt Sats 4.11 Rolles Sats som säger att då finns minst en stationär punkt inom $x \in]a, b[$.

c) Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $x \in [a, b]$ och $f(a) \neq f(b)$ så gäller att...

Lösningstips: Exempelvis fortsättning enligt Sats 3.9 som säger att alla då antas alla funktionsvärden mellan $f(a)$ och $f(b)$ minst i minst en punkt inom $x \in]a, b[$.

(3 p)

6. Skissa kurvor och para ihop funktion med tillhörande påstående:

- | | | | |
|----|--|------|--|
| a) | $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & , 2 < x \leq 4 \end{cases}$ | i) | Funktionen är kontinuerlig, strängt monoton och har kontinuerlig invers. |
| b) | $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2 & , 2 < x \leq 4 \end{cases}$ | ii) | Funktionen är kontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers. |
| c) | $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & , 1 < x \leq 3 \end{cases}$ | iii) | Funktionen är kontinuerlig, är strängt monoton och har diskontinuerlig invers. |
| d) | $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & , 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$ | iv) | Funktionen är diskontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers. |
| e) | $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2 & , 1 < x \leq 3 \end{cases}$ | v) | Funktionen är diskontinuerlig, är strängt monoton och har kontinuerlig invers. |

(3 p)

Svar: $a = iii$, $b = ii$, $c = v$, $d = i$ och $e = iv$

7. Visa att funktionen har minst en stationär punkt:

$$f(x) = 4 \arctan x + 2 \arccos x + \ln(2 - x^2)$$

(3 p)

Lösningstips:

$D_f = [-1, 1]$ eftersom att $\arccos x$ har snävast definitionsmängd och den rymms innanför de andra delfunktionernas definitionsmängder.

Man noterar att ändpunkterna ger lika funktionsvärde $f(-1) = f(1) = \pi$.

Dessutom är funktionen $f(x)$ deriverbar på hela definitionsmängden.

Enligt Rolles sats (villkoren är uppfyllda enligt ovan) gäller att det finns minst en inre punkt $x = \xi$ inom intervallet $] -1, 1[$ sådant att

$$f'(\xi) = 0$$

och därmed har funktionen minst en stationär punkt, vilket skulle visas.