Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2019

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2020-08-18, kl. 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Beräkna följande integraler:

a)

$$\int \frac{6+8x}{1+x^2}\,dx$$

Svar: $6\arctan x + 4\ln(1+x^2) + C$

b)

$$\int 6x^2\, e^{x^3} dx$$

Ledning: Substitution eller kedjeregeln baklänges ger $2e^{x^3} + C$

c)

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

Ledning: Kedjeregeln baklänges ger svaret $-\frac{1}{2}\cos^2 x + E$, omskrivning med dubbla vinkeln följt av integration ger svaret $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$ medan partiell integration ger svaren $\frac{1}{2}\sin^2 x + D$ eller $-\frac{1}{2}\cos^2 x + E$ vilka alla är korrekta svar.

(3 p)

2. Visa att

$$\cos^3 x = \frac{3\cos x}{4} - \frac{\cos 3x}{4}$$

Ledning: Omskrivning av vänsterledet med hjälp av Eulers formel för cosinus ger

$$\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right)^3 = \cdots = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} - 3e^{-ix} - e^{-i3x}}{8} = \cdots =$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2} = \cdots = \frac{3\cos x}{4} - \frac{\cos 3x}{4}$$

(3 p)

3. Låt

$$f(x) = x^3 + 2x$$

a) Visa att funktionen är strängt växande.

Ledning: Visa att derivatan är strängt positiv.

b) Beräkna

$$(f^{-1})'(33)$$

Ledning: Inversens $x = 33$ är detsamma som den ordinarie funktionens funktionsvärde $y = 33$ vilket inses genom spegling i symmetrilinjen $y = x$.

Man finner endast $f(3) = 33$ (ty strängt växande) och här finner man även att $f'(3) = 29$ och enligt sats gäller då att $(f^{-1})'(33) = \frac{1}{29}$

(3 p)

4. Låt

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{x}$$

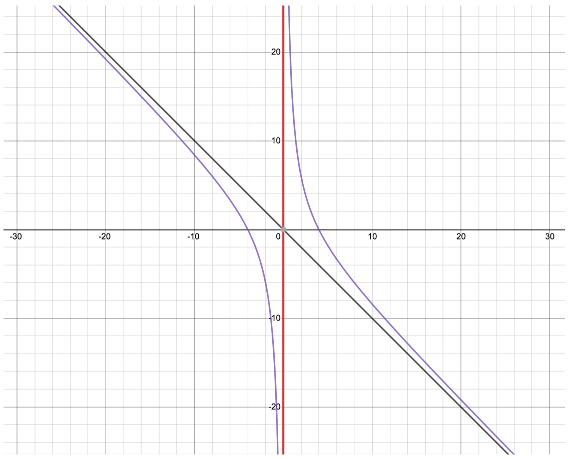
a) Beräkna eventuella stationära punkter.

Ledning: Funktionen saknar stationära punkter ty derivatan är strängt negativ.

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Ledning: Gränsvärdesstudier ger den sneda asymptoten $y = -x$ och den lodräta asymptoten $x = 0$

c) Skissa grafen med tillhörande asymptoter

Svar: 

(3 p)

5. Medelvärdessatsen för derivata

a) Förklara med hjälp av egna ord och en tydlig skiss vad satsen berätta.

Ledning: Se föreläsning 9 och sats 4.10 i läroboken.

b) Förklara med hjälp av egna ord och en tydlig skiss varför satsen inte gäller för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x+2\,, & x \geq 0 \\ x-2\,, & x < 0 \end{cases}$$

Ledning: Man ser att funktionen är diskontinuerlig i $x = 0$. Båda ”delfunktionerna” har derivata med värdet 1 i alla sina inre punkter men använder man differenskvoten ur medelvärdessatsen runt $x = 0$ får man alltid ett förslag på derivata som är strängt större än 1. Alltså kan (i detta exempel) medelvärdessatsens differenskvot ge ett orimligt förslag på derivata och detta bekräftar satsen inte gäller för diskontinuerliga funktioner.

(3 p)

6. Undersök om funktionen har ett största och ett minsta värde:

$$f(x) = x - 3x^{\frac{2}{3}}\,, \qquad x \in \,]-8, 1]$$

Ledning: Studie av eventuella I) stationära punkter (saknas inom aktuellt intervall), II) eventuella ändpunkter (endast $x = 1$), III) eventuella singulära punkter utifrån derivatan (endast $x = 0$) samt i detta fall den öppna änden då $x \to -8$ visar att minsta (funktions)värde saknas och största (funktions)värde är $y = 0$.

(3 p)

7. Para ihop funktion (a-d) med korrekt påstående (i-iv) genom att beräkna lämpliga gränsvärden:

a) $$f(x)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{1}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1}{x} & , \ x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & , \ x=0 \end{cases}$$

c) $$f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

d) $$f(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1}{x^2} & , \ x\neq 0 \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$$

i) Varken höger- eller vänsterkontinuerlig i $x=0$ och därmed inte deriverbar i $x=0$

ii) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x=0$ och därmed inte deriverbar i $x=0$

iii) Kontinuerlig och deriverbar i $x=0$

iv) Både höger- och vänsterkontinuerlig i $x=0$ men inte deriverbar i $x=0$

(3 p)

Lösningstips:

Funktion a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x\,\underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\text{begränsad}}=0$$

Detta visar att funktionen är deriverbar i $x=0$ (funktionen har till och med en stationär punkt i origo) och därmed är funktionen också kontinuerlig i $x=0$ då kontinuitet automatiskt följer om funktionen är deriverbar vilket är ett strängare krav.

Påstående iii) stämmer.

Funktion b)

$$\lim_{h\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}\neq f(0)$$

Detta visar att funktionen är högerkontinuerlig i $x=0$ men inte vänsterkontinuerlig i $x=0$ och därmed är funktionen inte heller deriverbar i $x=0$ då deriverbarhet är ett strängare krav än kontinuitet. Påstående ii) stämmer.

Funktion c)

$$\lim_{x\to 0} x \underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\text{begränsad}} = 0 = f(0)$$

Detta visar att funktionen är kontinuerlig i $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\arctan\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$$

Man ser nu att $\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ medan $\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

Alltså olika höger- och vänsterderivata i $x = 0$.

Detta visar att funktionen inte är deriverbar i $x = 0$.

Påstående iv) stämmer.

Funktion d)

$$\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} \neq f(0)$$

Detta visar att funktionen inte är kontinuerlig i $x = 0$ och därmed inte heller är deriverbar i $x = 0$ ty deriverbarhet är ett strängare krav än kontinuitet.

Påstående i) stämmer.