Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen A för kursen HT2020

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2021-01-10, kl. 14:00–19:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Låt $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x^2}$

a) Bestäm eventuella stationära punkter.

Lösningstips:

$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = 0$ ger $x = 2$

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips:

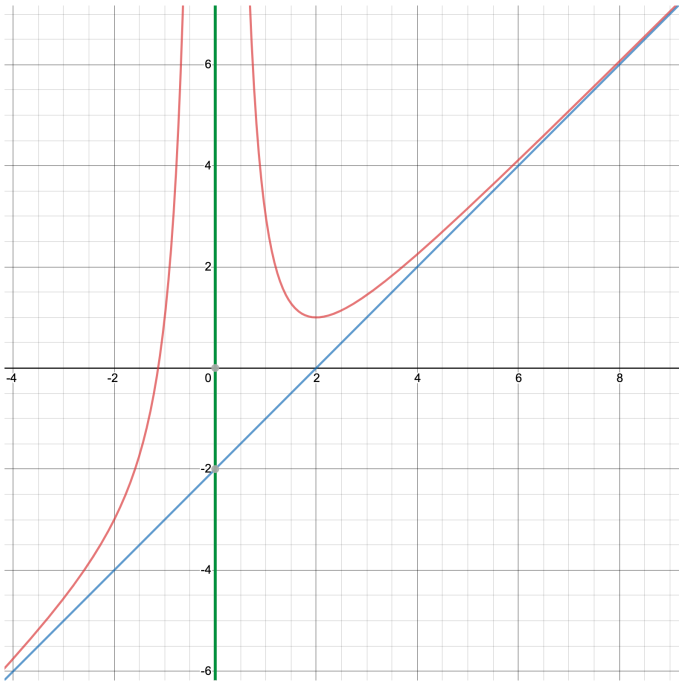
Gränsvärdesberäkningar enligt exempel 4.28 eller enligt tillhörande anmärkning 4.3 (med polynomdivision) i läroboken ger sned asymptot $y = x - 2$.

Gränsvärdesberäkningar med $x \to 0^+$ respektive $x \to 0^-$ ger lodrät asymptot i $x = 0$.

c) Skissa kurva med tillhörande asymptoter

Lösningstips:

Värdetabell tillsammans med informationen i a) och b) ger:



3 p

2. Lös de obestämda integralerna:

a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Lösningstips:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \cdots = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = \cdots = \arcsin\frac{x}{3} + C$$

b)

$$\int x^3 \ln 2x\,dx$$

Lösningstips:

$$\int \overbrace{x^3}^{\Uparrow}\,\underbrace{\ln 2x}_{\Downarrow}\,dx = \cdots = \frac{x^4 \ln 2x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

c)

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$$

Lösningstips:

Substitutionen $y = \tan x$ med tillhörande $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ (eller kedjeregeln baklänges) ger svaret $e^{\tan x} + C$.

3 p

3.

a) Härled derivatan till $f(x) = \sin x$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Gärna derivatans definition med dubbelsidigt intervall (se föreläsning 7) enligt $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x+h)}{2h} = \cdots = \cos x$

b) Härled derivatan till $f(x) = \tan x$ genom att utgå ifrån andra kända derivator.

Lösningstips: Se föreläsning 8; $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ och kvotregeln samt kända derivator för $\sin x$ och $\cos x$ ger $f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (\sin x(-\sin x))}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ eller $1 + \tan^2 x$.

3 p

4. Bestäm k och m så att funktionen $f(x)$ blir deriverbar för $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+3x) & \text{för } x > 0 \\ kx + m & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$$

3 p

Lösningstips:

Funktionen är deriverbar i alla inre punkter eftersom att delfunktionerna är elementära funktioner så endast skarven måste anpassas.

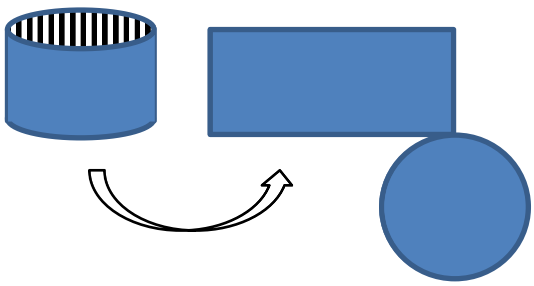
För den övre (högra) delfunktionen gäller i skarven att $\lim_{x\to 0^+} \ln(1+3x) = 0$ så punkten $(0, 0)$ måste vara ändpunkt för den räta linjen för kontinuitet. Därmed måste $m = 0$. Högerderivatan i skarven fås genom ”derivatans definition i punkt” som ger

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3h) - 0}{h - 0} = \lim_{x\to 0^+} 3\frac{\ln(1+3h)}{3h} = 3$$

och måste stämma med k för att funktionen skall vara deriverbar så $y = 3x + 0$.

3 p

5. En burk med volymen 1 dm^3 är gjord av plåt (en mantelyta och en cirkulär bottenyta men inget lock). Vilken radie skall den ha för att plåtens area skall bli minimal?



Lösningstips:

Radien = r, omkretsen = o, höjden = h, basytan = B, mantelytan = M, totala aren = A och volymen = V.

$$\begin{cases} B = \pi r^2 \\ V = Bh \\ V = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{\pi r^2}$$

$$\begin{cases} M = oh \\ o = 2\pi r \\ h = \dfrac{1}{\pi r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad M = \frac{2}{r}$$

$$\begin{cases} A = B + M \\ B = \pi r^2 \\ M = \dfrac{2}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = \pi r^2 + \frac{2}{r}$$

$$\begin{cases} A' = 2\pi r - \dfrac{2}{r^2} \\ A' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{1}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Teckenstudie av A' för $r > 0$ visar att $r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ ger ett minimum och då både ändpunkter och singulära punkter saknas är detta den sökta radien.

3 p

6. Teorifrågor:

a) Förklara med egna ord och en valfri funktion $f(x)$ varför en funktion måste vara deriverbar på det aktuella intervallet för att Rolles sats skall gälla?

Lösningstips:

Om man struntar i kravet på deriverbarhet genom att exempelvis studera funktionen $f(x) = |x|\,,\ -2 \leq x \leq 2$ som inte är deriverbar i origo och har lika funktionsvärden i ändpunkterna (krav enligt Rolles sats) så upptäcker man att funktionen saknar inre punkt med $f'(x)$ som stämmer överens med lutningen (differenskvoten) 0 mellan ändpunkterna. Alltså kan man inte strunta i kravet på deriverbarhet inom det aktuella intervallet ifall Rolles sats skall användas.

b) Kommentera påståendet ”$f(x) = x^6 - 20x^4 + 240x^2$ har varken inflexionspunkter eller terrasspunkter, trots att $f''(x) = 0$ i två punkter.” Rätt eller fel och varför? Motivera ditt svar med beräkningar.

Lösningstips:

Teckenstudium av $f''(x)$ visar att punkterna $x = 2$ och $x = -2$ är de enda två punkterna där $f''(x) = 0$ och att i övriga punkter är $f''(x) > 0$ och skiftar aldrig tecken så det hela stämmer.

3 p

7. Bestäm funktionens värdemängd:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 3\ln\sqrt{x} - \arctan x \quad , \quad x > 0$$

Ledning: För $x > 0$ gäller att $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{1+x^2} = \cdots = \frac{-2-2x^2+3x+3x^3-2x^2}{2x^2(1+x^2)} = \frac{2(x-1)(1+x^2)+2x^2}{2x^2(1+x^2)} = \frac{3x^3-4x^2+3x-2}{2x^2(1+x^2)} \ldots = \frac{(x-1)\overbrace{(3x^2-x+2)}^{\neq 0}}{2x^2(1+x^2)} = 0$ endast för $x = 1$ som därmed är den enda stationära punkten. Singulära punkter saknas då $f'(x)$ också är definierad för alla $x > 0$. Ändpunkter saknas. Vidare gäller att $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ (enligt Sats 3.13) och $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Teckenstudie av derivatan bekräftar att minimum antas i punkten $\left(1, 1 - \frac{\pi}{4}\right)$ så att

$$V_f = \left[1 - \frac{\pi}{4}, \infty\right[$$

3 p