Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen B för kursen HT2020

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2021-01-11, kl. 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Låt $f(x) = \frac{27}{x^3} + x - 3$

a) Bestäm eventuella stationära punkter.

Lösningstips:

$f'(x) = 1 - \frac{81}{x^4} = 0$ ger $x = \pm 3$

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips:

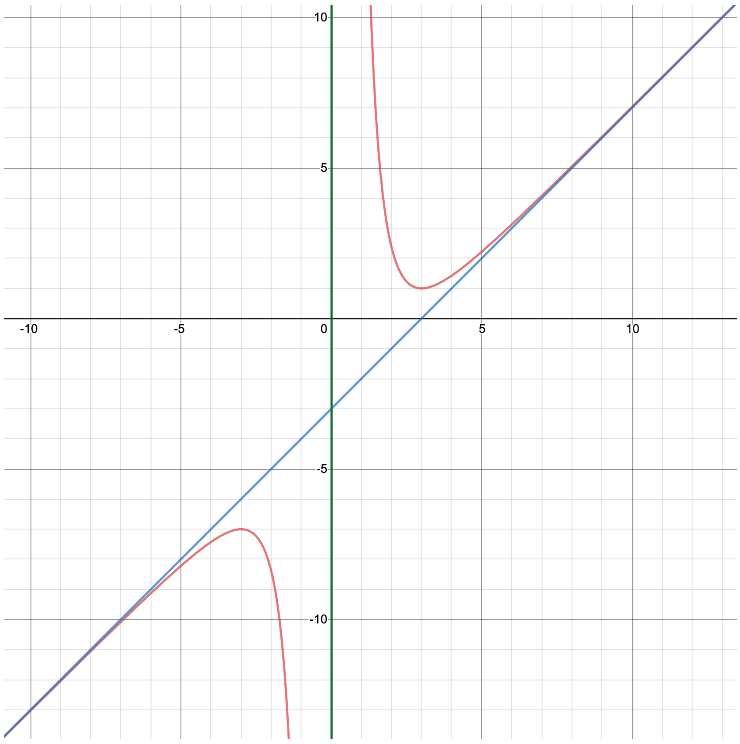
Gränsvärdesberäkningar enligt exempel 4.28 eller tillhörande enligt anmärkning 4.3 (med polynomdivision) i läroboken ger sned asymptot $y = x - 3$.

Gränsvärdesberäkningar med $x \to 0^+$ respektive $x \to 0^-$ ger lodrät asymptot i $x = 0$.

c) Skissa kurva med tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Värdetabell tillsammans med informationen i a) och b) ger:



3 p

2. Lös de obestämda integralerna:

a)

$$\int \tan x \, dx$$

Lösningstips:

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C$$

b)

$$\int e^{2x} \sin 2x \, dx$$

Lösningstips:

Partiell integration ger (efter två varv) den ursprungliga integralen i högerledet och då den löses ut får man svaret $\frac{e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)}{4} + C$.

c)

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx$$

Lösningstips:

Substitutionen $y = \arctan x$ med tillhörande $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ (eller kedjeregeln baklänges) ger svaret $e^{\arctan x} + C$.

3 p

3.

a) Härled derivatan till $f(x) = \ln 3x$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Se Föreläsning 7 och man får

$$f'(x) = \cdots = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\big(3(x+h)\big) - \ln 3x}{x+h-x} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{3x+3h}{3x}}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\text{sgv}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

b) Härled derivatan till $f(x) = \arcsin x$ genom att utgå ifrån en annan känd derivata.

Lösningstips: Se föreläsning 8. Ur $y = \arcsin x$ får man (i kvadrant 1 och 4) $\sin y = x$ som deriveras enligt kedjeregeln och man får $\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$. Trigettan ger sedan (i kvadrant 1 och 4)

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = |\text{i kvadrant 1 och 4}| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3 p

4. Bestäm k och m så att funktionen $f(x)$ blir deriverbar för $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ kx + m & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

Lösningstips:

Funktionen är deriverbar i alla inre punkter eftersom att delfunktionerna är elementära funktioner så endast skarven måste anpassas.

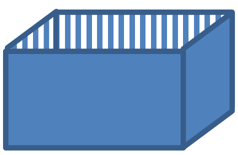
För den övre (vänstra) delfunktionen gäller i skarven att $\lim_{x\to 0^-} 2e^{3x} = 2$ så punkten $(0, 2)$ måste vara ändpunkt för den räta linjen för kontinuitet. Därmed $m = 2$. Vänsterderivatan i skarven fås genom ”derivatans definition i punkt” som ger

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2e^{3h} - 2}{h - 0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2\left(e^{3h} - 1\right)}{3h} 3 = 6$$

och måste stämma med k för att funktionen skall vara deriverbar så $y = 6x + 2$.

3 p

5. En kartong med volymen 4 dm³, utan lock är, gjord av tjockt papper (en kvadratisk bottenyta och fyra rektangulära sidoytor). Vilken mått skall kartongen ha (bottenytans kant respektive höjden) för att papprets area skall bli minimal?



Lösningstips:

Basytans kant = x, höjden = h, basytan = B, Sidoytorna (totalt) = S, totala aren = A och volymen = V.

$$\begin{cases} B = x^2 \\ V = Bh \\ V = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad h = \frac{4}{x^2}$$

$$\begin{cases} S = 4xh \\ h = \frac{4}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad S = \frac{16}{x}$$

$$\begin{cases} A = B + S \\ B = x^2 \\ S = \frac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = x^2 + \frac{16}{x}$$

$$\begin{cases} A' = 2x - \frac{16}{x^2} \\ A' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Teckenstudie av A' för $x > 0$ visar att $x = 2$ dm ger ett minimum och då både ändpunkter och singulära punkter saknas är detta den sökta kantens längd i bottenytans kvadrat. Insättning ger sedan $h = 1$ dm.

3 p

6. Teorifrågor:

a) Förklara med egna ord och en valfri funktion $f(x)$ varför en funktion måste vara deriverbar på det aktuella intervallet för att Medelvärdessatsen skall gälla?

Lösningstips:

Om man struntar i kravet på deriverbarhet genom att exempelvis studera funktionen $f(x) = |x|\,,\ -1 \leq x \leq 3$ som inte är deriverbar i origo och har olika funktionsvärden i ändpunkterna (krav enligt Medelvärdessatsen) så upptäcker man att funktionen saknar inre punkt med $f'(x)$ som stämmer överens med lutningen (differenskvoten) mellan ändpunkterna. Alltså kan man inte strunta i kravet på deriverbarhet inom det aktuella intervallet ifall Medelvärdessatsen för derivata skall användas.

b) Kommentera påståendet "$f(x) = x^4 - 4x^3$ har två inflexionspunkt men bara en av dem är en terrasspunkt". Är det rätt eller fel? Motivera ditt svar med beräkningar.

Lösningstips:

Teckenstudie av $f''(x)$ visar att punkterna $x = 0$ och $x = 3$ är de enda där $f''(x)$ skiftar tecken men bara i $x = 0$ är dessutom $f'(x) = 0$ så det hela stämmer

3 p

7. Para ihop funktionerna till vänster med korrekt påstående till höger genom att göra beräkningar av lämpliga gränsvärden:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \ x > 0 \\ x + 2 & , \ x \leq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \ x \geq 0 \\ 1 - x & , \ x < 0 \end{cases}$

i) Kontinuerlig i $x = 0$ men inte deriverbar i $x = 0$

ii) Vänsterkontinuerlig men inte högerkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

iii) Kontinuerlig och deriverbar i $x = 0$

iv) Varken höger- eller vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

v) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

Lösningstips:

Alla delfunktionerna är deriverbara i alla inre punkter (enligt sats) då de är elementära funktioner. Därmed räcker det att kontrollera skarvarna:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 = f(0)$ (högerkontinuerlig) och $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-1/x} = \infty \neq f(0) = 0$ (ej vänsterkontinuerlig) så **a = v**.

b) eftersom att $\lim\limits_{x \to 0} e^{1/x^2} = \infty \neq f(0) = 0$ (ej kontinuerlig och därmed inte deriverbar) så **b = iv**.

c) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{xe^{\frac{1}{x^2}}} = \cdots = \left| \begin{matrix} \text{enligt} \\ \text{Sats 3.13} \end{matrix} \right| = 0$

Alltså deriverbar (ändligt gränsvärde) och därmed även kontinuerlig så **c = iii**.

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \neq f(0)$, därmed inte högerkontinuerlig och inte heller deriverbar så **d = ii**.

e) Kontinuerlig tack vare att $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - x = 1 = f(1)$ men derivatans definition ger vänsterderivatan $f_-{}'(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = 1$ medan högerderivatan $= -1$ (räta linjens k-värde) – alltså olika vänster- och högerderivata så **e = i**.

3 p