Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2020

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2021-03-16, kl. 14:00-19:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1.

Låt

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$$

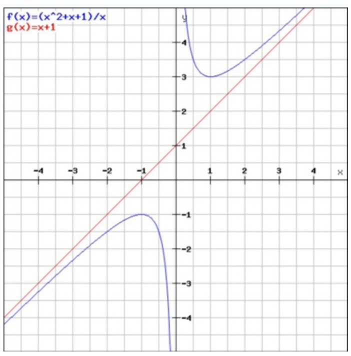
a) Bestäm samtliga stationära punkter.

Svar: Lokal minimipunkt $x = 1$ samt lokala maximipunkt $x = -1$

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips: Lodrät asymptot $x = 0$ och sned asymptot $y = x + 1$ som fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa grafen med tillhörande asymptoter.

Svar: 

3 p

2.

a) Förenkla uttrycket:

$$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Lösningstips: Enhetscirkeln och Trigettan ger $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Visa att funktionen saknar invers:

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$$

Lösningstips: Insättning av olika x -värden symmetriskt runt $x = 4$ ger samma funktionsvärde – alltså är funktionen inte injektiv och saknar därmed invers.

c) Bestäm den primitiva funktionen:

$$\int e^{2x} \sin 4x \, dx$$

Lösningstips: Partiell integration ger åter den ursprungliga integralen efter två varv. Denna löses då ut och man får $F(x) = \frac{1}{10} e^{2x} \sin 4x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos 4x + C$

3 p

3.

a) Vad krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$?

Lösningstips: Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten.

b) Bestäm a så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + \sin x}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ a & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim_{x \to 0} f(x)$ ger $a = 3$.

3 p

4.

a) Härled $f'(x)$ med hjälp av känd derivata hos tillhörande invers om:

$$f(x) = \arcsin x$$

Lösningstips: Tillhörande invers deriveras enligt kedjeregeln, Trigettan ger sedan $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Härled $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition om:

$$f(x) = e^{x^2}$$

Lösningstips: Derivatans definition ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)^2} - e^{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x^2+2hx+h^2} - e^{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{x^2} \frac{e^{2hx+h^2} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{x^2} \frac{e^{2hx+h^2} - 1}{h(2x+h)}(2x+h) = \lim_{h\to 0} e^{x^2} \underbrace{\frac{e^{2hx+h^2} - 1}{2hx+h^2}}_{\substack{sgv \\ \to 1}}(2x+h) = e^{x^2} 2x$$

3 p

5.

Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter:

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x + 5 \quad , \quad x \in [-1, 27]$$

Lösningstips: Lokala maximipunkter i ändpunkten $x = -1$ och i den stationära punkten $x = 8$ med $f'(x) = 0$ samt lokala minimipunkter i ändpunkten $x = 27$ och i den singulära punkten $x = 0$ där derivata saknas.

3 p

6.

Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x \text{ då } x > 1 \\ kx + m \text{ då } x \leq 1 \end{cases}$$

a) Bestäm k och m så att funktionen blir deriverbar för alla x-värden.

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^3 + x) = 2$. Därmed vet man att punkten $(1, 2)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(1, 2)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$f'_{höger}(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x^2+x+2) = 4$$

Därmed vet man dessutom att $k = 4$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 1$. Annars skulle punkten $(1, 2)$ bli en singulär punkt med olika höger- och vänsterderivata.

Insättning av punkten och k-värdet i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger dessutom $m = -2$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x \text{ då } x > 1 \\ 4x - 2 \text{ då } x \leq 1 \end{cases}$$

b) Bestäm $(f^{-1})'(30)$.

Lösningstips: I föregående uppgift fick man en strängt växande funktion ($f(x) > 0$) och resonemang med symmetri eller med sats 4.6 ger $(f^{-1})'(30) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{28}$

3 p

7. Visa att funktionen har minst en stationär punkt:

$$f(x) = \arcsin x - 2\arctan x$$

3 p

Lösningstips: Funktionen har $D_f = [-1, 1]$ och för ändpunkter gäller $f(-1) = f(1) = 0$. Alltså är ”lutningen mellan ändpunkterna = 0”. Därmed måste det enligt Rolles sats (sats 4.11) eller *Medelvärdessatsen för derivator* (sats 4.10) finnas *minst en inre punkt* inom detta slutna intervall sådan att $f'(x) = 0$ och därmed finns minst en stationär punkt.

Fotnot: De stationära punkterna behöver alltså inte beräknas i denna uppgift – det räcker med att visa att minst en sådan finns, enligt ovan. Om man ändå föredrar att beräkna dem på klassiskt sätt genom $f(x) = 0$ (sats 4.9) får man punkterna

$$x = \pm\sqrt[4]{3}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \pm\sqrt{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \pm\sqrt{2\sqrt{3}-3} \approx \pm 0.68$$