Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2020

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2021-08-17, kl. 08:00–13:00			

1.

a) Bestäm

$$\int \frac{4x+3}{1+x^2}\,dx$$

Lösning: $\int \frac{4x+3}{1+x^2}\,dx \ = 2\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \ = 2\ln(1+x^2) + 3\arctan x + C$

b) Bestäm

$$\int x^2 \sin 3x \, dx$$

Ledning: Upprepad partiell integration ger $-\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2x\sin 3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27} + C$

c) Bestäm

$$\int e^{x^2} 4x\,dx$$

Lösning: $\int e^{x^2} 4x\,dx = 2\int e^{x^2} 2x\,dx = \left|\begin{matrix} Kedjeregeln \\ baklänges \end{matrix}\right| = 2e^{x^2} + C$

3 p

2. Låt $f(x) = \frac{x^3+4}{2x^2}$

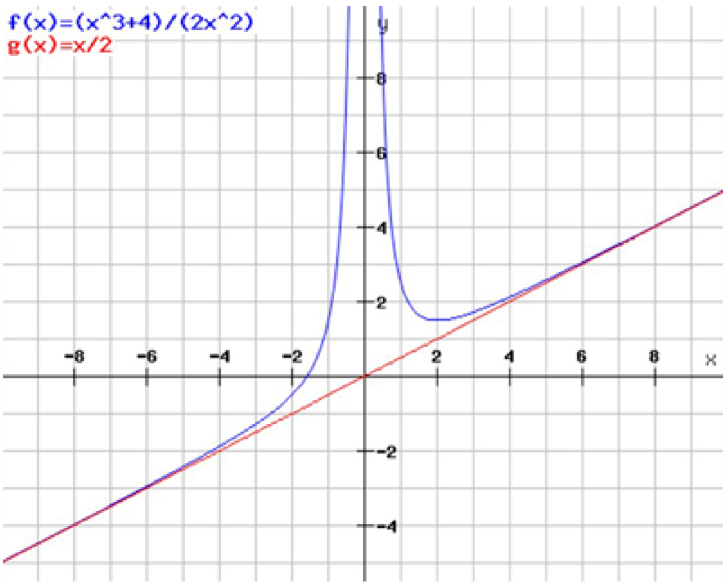
a) Bestäm samtliga asymptoter.

Ledning: Gränsvärdesstudier ger asymptoter $x = 0$ och $y = \frac{x}{2}$

b) Bestäm samtliga stationära punkter.

Ledning: Teckenstudium av derivat ger en lokal minimipunkt $x = 2$

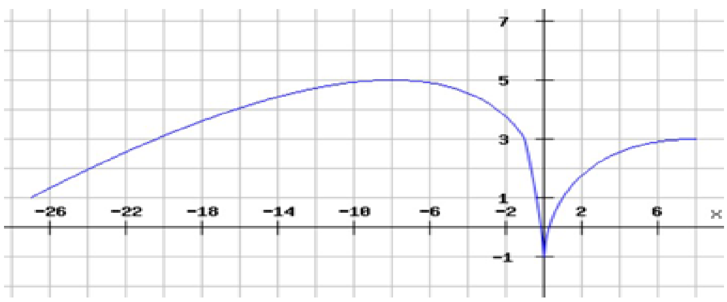
c) Skissa grafen.



3 p

3. Bestäm största och minsta värde för $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - |x+1|$ inom det slutna intervallet $x \in [-27, 8]$

Ledning: Tre ändpunkter, två stationära punkter och två singulära punkter studeras. Av dessa sju sammanfaller några så i praktiken blir det fem olika punkter. Största värde $= 5$ i stationära punkten $x = -8$ och minsta värde $= -1$ i singulära punkten $x = 0$ (derivata saknas i denna punkt)



3 p

4. Låt $f(x) = \sin x + \cos x + 3x$

a) Visa att $f(x)$ är strängt växande

Ledning: Man visar exempelvis att förstaderivatan är positiv för alla x-värden

b) Bestäm inversens derivata $(f^{-1})'(3\pi - 1)$

Ledning: Symmetri i $y = x$ utnyttjas hos funktion och invers. Eftersom att just $f(\pi) = 3\pi - 1$ beräknas $f'(\pi) = 2$ och symmetri ger att $(f^{-1})'(3\pi - 1) = \frac{1}{2}$

3 p

5.

a) Visa med hjälp av invers att $f(x) = \arcsin x$ har derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ledning:

$$y = \arcsin x$$

Invers ger

$$\sin y = \sin(\arcsin x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x$$

Ledvis derivering med avseende på x ger

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Alltså gäller att

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) Bestäm $f'(x)$ för $f(x) = e^{\sin^2 3x}$

Ledning: Kedjeregeln ger $(x) = e^{(\sin 3x)^2} \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6 \sin 3x \cos 3x \, e^{\sin^2 3x}$

3 p

6.

a) Visa med hjälp av derivatans definition att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & \text{för} \quad x \geq 2 \\ x^3 + 12 & \text{för} \quad x < 2 \end{cases}$$

är deriverbar i $x = 2$

Ledning: Tänk på att $f(2) = 2^2 + 8 \cdot 2 = 12$ härstammar från den övre delfunktionen vid beräkning av både vänster- och högerderivata eftersom att $x = 2$ tillhör enbart den. Derivatans definition ger för denna punkt lika värde från båda hållen:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{(x^3 + 12) - (2^2 + 8 \cdot 2)}{x - 2} = \cdots = 12$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(x^2 + 8x) - (2^2 + 8 \cdot 2)}{x - 2} = \cdots = 12$$

b) Visa med hjälp av derivatans definition att $f(x) = e^{x^2}$ har derivatan $f'(x) = 2xe^{x^2}$

Lösning:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - (x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(x+h)^2} - e^{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2+2xh+h^2} - e^{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{2xh+h^2} - 1\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{h(2x+h)} - 1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x^2}\left(e^{h(2x+h)} - 1\right)(2x+h)}{h(2x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x+h)e^{x^2} \underbrace{\frac{\left(e^{h(2x+h)} - 1\right)}{h(2x+h)}}_{\to 1} = 2xe^{x^2}$$

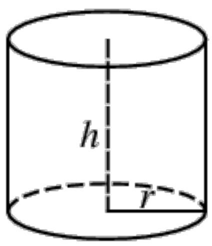
Notera att denna derivata baklänges ger primitiv funktion i uppgift 1 c)

3 p

7. En tunna med formen av en rak cirkulär cylinder skall tillverkas av 1 m² plåt som skall räcka till två cirkulära bottenytor och en mantelyta.

Bestäm cylinderns maximala volym.

3 p



Ledning:

$$\text{bottenyta} = B = \pi r^2$$

$$\text{omkretsen} = O = 2\pi r$$

$$\text{mantelytan} = M = 1 - \text{bottenytor} = 1 - 2\pi r^2$$

$$\text{höjden} = h = \frac{\text{mantelytan}}{\text{omkretsen}} = \frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\text{volym} = V(r) = Bh = \pi r^2 \left(\frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r}\right) = \frac{r}{2} - \pi r^3$$

$$\begin{cases} V'(r) = \dfrac{1}{2} - 3\pi r^2 \\ V'(r) = 0 \end{cases} \sim \quad r = \pm \frac{1}{\sqrt{6\pi}}$$

Teckenstudium eller andraderivata ger maximal volym för

$$\begin{cases} V(r) = Bh = \pi r^2 \left(\dfrac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r}\right) \\ r = \dfrac{1}{\sqrt{6\pi}} \end{cases} \sim \quad V = \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\right)^2 \cdot \frac{1 - 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\right)^2}{2\pi \frac{1}{\sqrt{6\pi}}}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2\pi\sqrt{6\pi}}{6\pi}} = \frac{1}{3\sqrt{6\pi}} \approx 0{,}077 \text{ m}^3$$