Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2021

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2022-01-10 klockan 08:00-13:00			

---

1. Lös de obestämda integralerna

a)

$$\int 8x\cos x^2\,dx$$

Ledning: Variabelskifte med exempelvis $u = x^2$ och tillhörande derivata ger svaret

$4\sin x^2 + C$

b)

$$\int x^2 \ln 3x\,dx$$

Ledning: Partiell integration med derivering av $\ln 3x$ ger svaret

$\frac{x^3}{3}\ln 3x - \frac{x^3}{9} + C$

c)

$$\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$$

Ledning: $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx$ ger svaret

$\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$

3 p

2. Låt

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2}$$

a) Bestäm eventuella stationära punkter.

Ledning: Polynomdivision ger $f(x) = x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$ med derivatan

$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3}$ som nollställs ut genom

$x^3 - 3x - 2 = 0$ med nollställen $x = -1$ eller $x = 2$

vilka är stationära punkter.

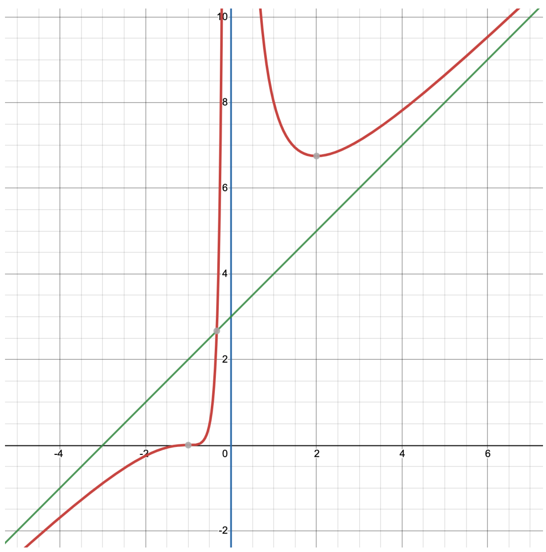
b) Bestäm eventuella asymptoter.

Svar: Gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2} = \infty$ ger lodrät asymptot i $x = 0$

och $x + 3 + \overbrace{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}^{\substack{\to 0 \text{ } då \\ x\to\pm\infty}}$ ger sned asymptot $y = x + 3$.

c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.

Ledning: Värdetabell med bl.a. de stationära punkterna $(-1, 0)$ och $\left(2, \frac{27}{4}\right)$ samt tillhörande asymptoterna ger:



3 p

3. Beräkna $(f^{-1})'(15)$ till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$$

Ledning: Funktionen är strängt växande tack vare att derivatan $f(x) = x^2 + 2$ är strängt positiv och därmed existerar inversen $f^{-1}(x)$. Då inversen ej kan bestämmas beräknar man istället derivatan i ”spegelpunkten” $(3, 15)$ utifrån symmetrilinjen $y = x$ och man får derivatan $f'(3) = 11$ som efter spegling ger den sökta derivatan $(f^{-1})'(15) = \frac{1}{11}$.

3 p

4. Undersök om funktionen är deriverbar i $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2x+1) & , \quad x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Svar: Nej – den är inte ens kontinuerlig i $x = 0$.

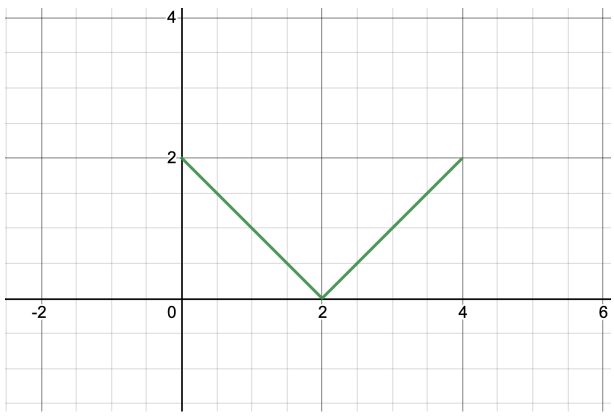
3 p

5. Teorifrågor:

a) Förklara med skiss och egna ord varför *Rolles sats* inte gäller för exempelvis funktionen

$$f(x) = |x - 2|$$

Ledning: Funktionen är uppenbart kontinuerlig (absolutbelopp av elementär funktion) och ett av tre villkor uppfyllt oavsett intervall. Genom att exempelvis studera intervallet $x \in [0, 4]$ som ger ändpunkter $f(0) = f(4)$ är två av tre villkor uppfyllda för just detta intervall. Dock är funktionen inte deriverbar i $x = 2$ och därmed är inte alla tre villkoren för Rolles sats uppfyllda och man tillåts inte använda satsen på detta intervall; det finns alltså ingen garanti för att det skall finnas *minst en stationär punkt inom det aktuella intervallet*, vilket satsen annars säger. Skissad kurva åskådliggör det hela och saknar stationär punkt:



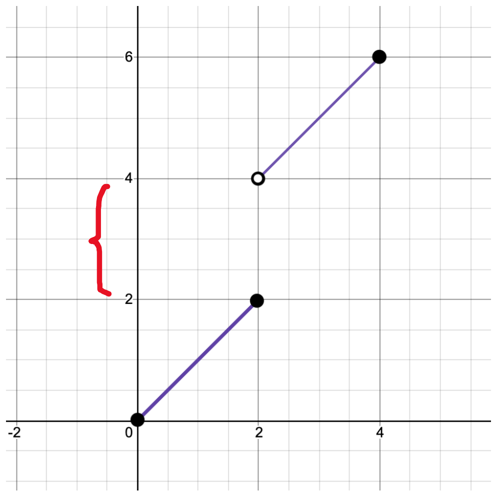
b) Förklara med skiss och egna ord varför *Satsen om mellanliggande värden* inte gäller för exempelvis funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 2 \\ x + 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Ledning: Låt oss exempelvis studera intervallet $x \in [0, 4]$ med *de olika funktionsvärdena* $f(0) = 0$ respektive $f(4) = 6$ i ändpunkterna. *Ett av två villkor* är därmed uppfyllt. Funktionen är dock diskontinuerlig i $x = 2$ och därmed uppfyller vi inte det andra villkoret som kräver kontinuitet på hela det kompakta intervallet.

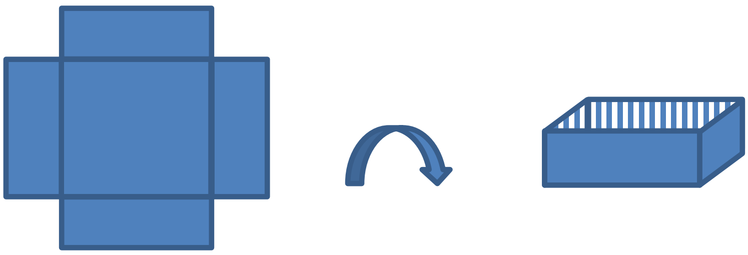
Det finns därmed ingen garanti för att "*alla funktionsvärden* inom intervallet $y \in [0, 6]$ (alltså mellan ändarnas funktionsvärden) existerar i minst en punkt inom det aktuella intervallet" vilket satsen annars säger.

Skissad kurva med saknade y-värden inom intervallet $y \in [0, 6]$ åskådliggör det hela:



3 p

6. En ask är gjord av plåt med en kvadratisk bottenyta + fyra rektangulära sidoytor. Plåten har den totala arean 12 dm². Bestäm askens maximala volym.



Ledning: Genom att döpa kanterna av kvadraten till x får man efter förenkling volymen $V(x) = Bh = x^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{4}\right) = 3x - \frac{x^3}{4}$ vars derivata teckenstuderas inom intervallet $x \in [0, \sqrt{12}]$ och man finner ett globalt maximum för $x = 2$ som ger maximala volymen 4 dm³.

3 p

7. Para ihop funktionerna till vänster med korrekt påstående till höger genom att göra beräkningar av lämpliga gränsvärden:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \ x > 0 \\ x & , \ x \leq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} e^{x} & , \ x \geq 0 \\ 1 - 2x & , \ x < 0 \end{cases}$

i) Kontinuerlig i $x = 0$ men inte deriverbar i $x = 0$

ii) Varken höger- eller vänster-kontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

iii) Vänsterkontinuerlig men inte högerkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

iv) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

v) Kontinuerlig och deriverbar i $x = 0$

Ledning: gränsvärdesstudier av de olika funktionerna, från båda hållen mot $x = 0$, ger slutsatserna a = v, b = iii, c = iv, d = ii och e = i

3 p