Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@ liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2021

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2022-03-16, kl. 08:00-13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Låt

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

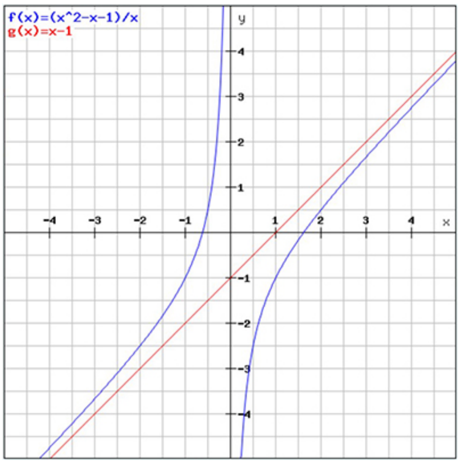
a) Undersök om $f(x)$ har några asymptoter.

Lösningstips: Gränsvärden ger från båda hållen lodrät asymptot $x = 0$. Sned asymptot $y = x - 1$ fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

b) Undersök om $f(x)$ har några stationära punkter.

Lösningstips: $f'(x) = \cdots = \frac{1+x^2}{x^2} \neq 0$ och därmed saknas stationära punkter

c) Skissa kurvan till $f(x)$

Svar: 

(3 p)

2. Lös den obestämda integralen på tre olika sätt

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

Lösningstips:

I) Med hjälp av variabelsubstitution:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x \\ \dfrac{du}{dx} = \cos x \end{matrix} \right| = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + A = \boxed{\frac{\sin^2 x}{2} + A}$$

II) Med hjälp av partiell integration:

$$\int \sin x \cos x \, dx = |PI| = -\cos x \cos x - \int (-\cos x)\,(-\sin x)\, x \, dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int \sin x \cos x \, dx = -\cos^2 x + B$$

$$\Leftrightarrow \int \sin x \cos x \, dx = \boxed{-\frac{\cos^2 x}{2} + C}$$

III) Med hjälp av sinus för dubbla vinkeln:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x \, dx = \int \sin 2x \, dx = \boxed{-\frac{\cos 2x}{2} + D}$$

Notera att de tre svaren motsvarar varandra tack vare att de tre konstanter A, C och D är olika.

(3 p)

3. Bestäm samtliga lokala extrempunkter hos funktionen

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x + 2 \quad , \quad x \in]-4, 8]$$

Lösningstips:
Punkter som kan ge lokala extrempunkter är
I. eventuella ändpunkter (i detta fall endast $x = 8$)
II. eventuella singulära punkter (i detta fall $x = 0$) där $f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1$ inte är definierad
III. inre stationära punkter (saknas då punkten $x = 8$ inte tillhör det öppna intervallet $x \in]-4, 0[\cup]0, 8[$ där derivatan existerar)

Teckenstudium av derivatan visar att $x = 0$ är lokalt minimum och $x = 8$ är lokalt maximum.

(3 p)

4.

a) Berätta vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara deriverbar i en punkt $x = a$.

Lösningstips: Funktionen skall vara definierad i en omgivning till $x = a$ och gränsvärdet för differenskvoten (se definition 4.1) skall existera ändligt.

b) Härled derivatan till $f(x) = \tan x$ med hjälp av derivatans definition och additionssatsen för tangens:

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

Lösningstips:

Derivatans definition (Def 4.1) ger för $f(x) = \tan x$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x + h) - \tan x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan x + \tan h - \tan x\,(1 - \tan x \tan h)}{h(1 - \tan x \tan h)} = \lim_{h \to 0} \frac{\tan h + \tan^2 x \tan h}{h(1 - \tan x \tan h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan h(1 + \tan^2 x)}{h(1 - \tan x \tan h)} = \lim_{h \to 0} 2 \cdot \underbrace{\frac{\tan h}{h}}_{\substack{sgv \\ \to 1}} \cdot \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \underbrace{\tan x \underbrace{\tan h}_{\to 0}}_{\to 0}} = 1 + \tan^2 x$$

(3 p)

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} kx + m & , \ x \leq 4 \\ \sqrt{x} & , \ x > 4 \end{cases}$$

Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar.

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms i skarven:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x} = 2.$$

Därmed vet man att punkten $(4, 2)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(4, 2)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$f'_{höger}(4) = \lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 4^+} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4^+} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

Därmed vet man dessutom att $k = \frac{1}{4}$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 2$. Annars skulle punkten $(2, 10)$ bli en singulär punkt (utifrån derivatan). Insättning av punkten och k-värdet i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger sedan att $m = 1$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + 1 & \text{för} \ \ x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{för} \ \ x > 4 \end{cases}$$

(3 p)

6.

a) Bestäm y'' för den sammansatta funktionen $y = f\big(g(x)\big)$

Lösningstips: Förstaderivatan blir enligt kedjeregeln $y' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$
Produktregeln ger sedan andraderivatan enligt

$$y'' = \Big(f''\big(g(x)\big)g'(x)\Big)\, g'(x) + f'\big(g(x)\big)g''(x)$$

$$= f''\big(g(x)\big)\big(g'(x)\big)^2 + f'\big(g(x)\big)g''(x)$$

b) Ge exempel på en funktion $y = f(x)$ som uppfyller kravet $f''(0) = 0$ utan att funktionen har en inflexionspunkt i $x = 0$ och motivera varför.

Lösningstips: Andraderivaten i $x = 0$ skall vara lika med noll utan att andraderivatan skiftar tecken runt $x = 0$ (vilket den gör i en inflexionspunkt). Funktionen $f(x) = x^4$ uppfyller kravet $f''(x) = 0$ i punkten $x = 0$ samtidigt som $f''^{(x)} = 12x^2$ är positiv (har samma tecken) på båda sidorna av $x = 0$

c) Förklara varför en funktion måste vara deriverbar för att *Medelvärdessatsen för derivator* ska gälla.

Lösningstips: Genom att exempelvis välja en funktion såsom $y = |x|$ eller $y = x^{\frac{2}{3}}$ vilka båda innehåller en *singulär punkt* (utifrån derivatan) i $x = 0$ så kan man med en skiss visa att det ofta helt saknas *inre punkter med samma derivata som "lutningen mellan ändpunkterna"* (vilka satsen annars anger att det finns) så länge den singulära punkten ingår i det valda intervallet.

(3 p)

7. Visa med stöd av valfri sats att $f(x) = \arcsin x - 2 \arctan x$ har minst en stationär punkt.

(3 p)

Lösningstips: Funktionen har $D_f = [-1, 1]$ och för ändpunkter gäller $f(-1) = f(1) = 0$. Alltså är "lutningen mellan ändpunkterna = 0". Därmed måste det enligt Rolles sats (sats 4.11) eller *Medelvärdessatsen för derivator* (sats 4.10) finnas *minst en inre punkt* inom detta slutna intervall sådan att $f'(x) = 0$ och därmed finns minst en stationär punkt.

Fotnot: De stationära punkterna behöver alltså inte beräknas i denna uppgift; det räcker med att visa att minst en sådan finns, enligt ovan. Om man ändå föredrar att beräkna dem på klassiskt vis genom $f(x) = 0$ (sats 4.9) får man punkterna

$$x = \pm\sqrt[4]{3}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \pm\sqrt{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \pm\sqrt{2\sqrt{3}-3} \approx \pm 0.68$$