Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2021

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Max:	21 p
Betygsgränser:	Betyg 5 minst 16 p, betyg 4 minst 12 p, betyg 3 minst 8 p.
Bonus:	0–2 p från KTR1 skriven tidigast 1 år tidigare.
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej nödvändigtvis är sorterade enligt svårighetsgrad.
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal.
Skrivtid:	2022-08-16, kl. 08:00-13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1.

a) Förenkla uttrycket:

$$\tan\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$$

Lösningstips: Hjälptriangel eller enhetscirkeln och Pythagoras sats ger svaret $\frac{5}{12}$

b) Visa att funktionen saknar invers:

$$f(x) = 10^{x^2}$$

Lösningstips: Insättning av olika x-värden med samma belopp ger samma funktionsvärde – alltså är funktionen inte injektiv och saknar därmed invers.

c) Härled Eulers formel för $\cos x$ med hjälp av Eulers första formel:

$$z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Lösningstips: Addera z och $\bar{z}$ på polär form och lös sedan ut $\cos x$.

3 p

2.

a) Berätta vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$.

Lösningstips: Se Definition 3.5 i läroboken – den säger att gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten $x = a$ (eller att punkten $x = a$ är en isolerad punkt).

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \in \mathbb{R}$ då

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x + e^x - 1 - \sin 2x}{x} & \text{då } x \neq 0 \\ A \text{ då } x = 0 \end{cases}$$

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ beräknas med hjälp av Maclaurin eller standardgränsvärden och kontinuitet fås med $A = 3$.

3 p

3.

a) Berätta vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara deriverbar i en punkt $x = a$.

Lösningstips: Funktionen skall (1) vara definierad i en omgivning till $x = a$ och gränsvärdet för differenskvoten (se definition 4.1) skall existera ändligt (notera .

b) Härled derivatan till $f(x) = \tan x$ med hjälp av derivatans definition och sambandet

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

Lösningstips: Härledning enligt derivatans definition ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan x + \tan h}{h(1 - \tan x \tan h)} - \frac{\tan x\,(1 - \tan x \tan h)}{h(1 - \tan x \tan h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan h + \tan^2 x \tan h}{h(1 - \tan x \tan h)} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\tan h}{h}}_{\to 1} \cdot \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \underbrace{\tan x \tan h}_{\to 0}} = 1 + \tan^2 x$$

3 p

4.

Låt

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

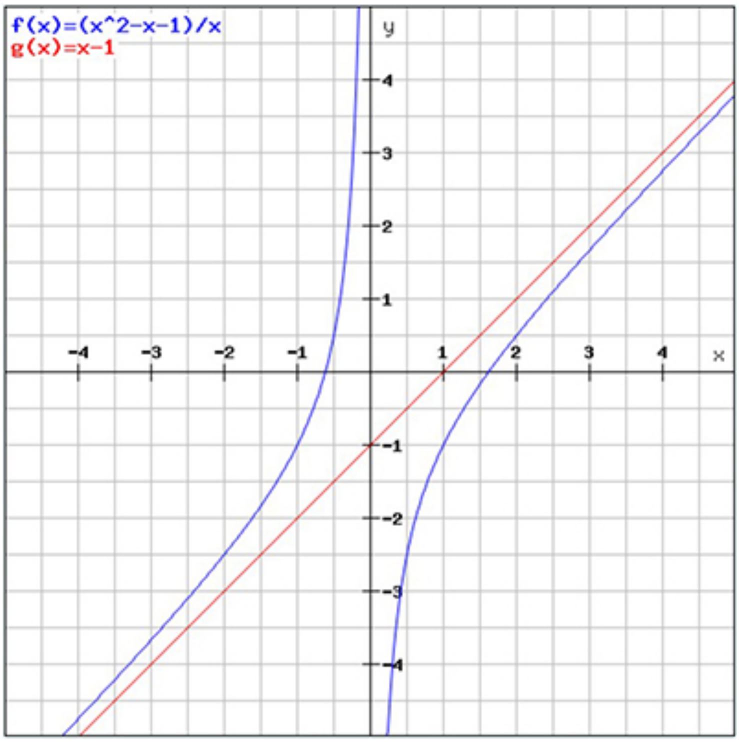
a) Undersök om funktionen har stationära punkter

Lösningstips: $f'(x) = \frac{(2x-1)x-(x^2-x-1)}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + 1 \neq 0$ och därmed saknas stationära punkter

b) Bestäm samtliga asymptoter

Lösningstips: Gränsvärdesstudie ger lodrät asymptot $x = 0$. Sned asymptot $y = x - 1$ fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa grafen

Svar: 

3 p

5.

Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x \text{ då } x > 2 \\ kx + m \text{ då } x \leq 2 \end{cases}$$

a) Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig (I) och blir deriverbar (II) för alla x-värden.

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms i skarven: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^3 - x) = 6$. Därmed vet man att punkten $(2, 10)$ skall ingå som ändpunkt hos den räta linjen för att $f(x)$ skall bli kontinuerlig, vilket är ett krav för deriverbarhet. Tack vare att punkten $(2, 6)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition och punkten $(2, 6)$ enligt:

$$f'_{höger}(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3-x-6}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} (x^2+2x+3) = 11$$

Därmed vet man dessutom att den räta linjen måste ha $k = 11$ är så att vänster- och högerderivatan blir lika i skarven $x = 2$ vilket är ett krav för deriverbarhet.

Insättning av punkten och k-värdet i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger $m = -16$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{då } x > 2 \\ 11x - 16 & \text{då } x \leq 2 \end{cases}$$

b) Bestäm:

$$(f^{-1})'(-5)$$

Lösningstips: Resonemang med symmetri eller med sats 4.6.

Funktionen $f(x)$ är strängt växande vilket kan visas med hjälp av derivatan som är strängt positiv och därmed finns garanterat en invers $f^{-1}(x)$. När man studerar $f(x)$ ser man att ”spegelpunkten hos $f(x)$” till den sökta punkten hos inversen (utifrån symmetrilinjen $y = x$) måste vara $(1, -5)$. Den finns på den räta linjen $y = 11x - 16$ till vänster och nedanför skarven i $(2, 6)$.

Derivatan i spegelpunkten som ligger på den ordinarie funktionens räta linjen är $k = 11$. I den sökta punkten hos inversen $(-5, 1)$ är därmed derivatan $(f^{-1})'(-5) = \frac{1}{11}$ vilket är det inverterade värdet av derivatan i ”dess spegelpunkt” enligt sats 4.6.

3 p

6.

Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$f(x) = 2 + x - 3x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad x \in [-1, 64]$$

3 p

Lösningstips:

På kompakta intervall som detta finns alltid största och minsta funktionsvärde i (1) stationära punkter, (2) singulära punkter eller (3) ändpunkter. Studie av derivatan ger stationär punkt i $x = 8$ och en singulär punkt i $x = 0$. Ändpunkterna ses ovan.

Funktionsvärde i dessa fyra punkter är $f(-1) = f(8) = -2$ (minsta värde),

$f(64) = 2 + 64 - 3 \cdot 4^2 = 18$ (största värde) medan den singulära

punktens funktionsvärde $f(0) = 2$ enbart är en lokal extrempunkt.

7. Låt

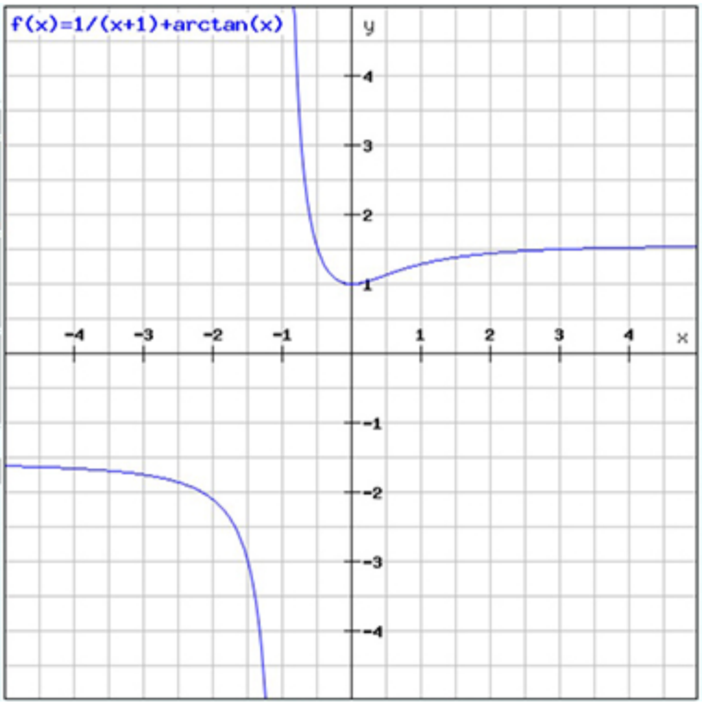
$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \arctan x$$

a) Bestäm värdemängden för

Lösningstips: Derivatan skriven på formen $f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^2(x^2+1)}$ ger enbart en stationär punkt i $x = 0$ (då $y = 1$) och teckenstudium av derivatan visar att den är en lokal minimipunkt. Utöver detta visar teckenstudium och gränsvärden att

$$V_f = \left]-\infty, -\frac{\pi}{2}\right[\cup [1, \infty[$$

b) Skissa funktionens kurva.



(3 p)