Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Läs sedan tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2022

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2023-03-15 klockan 08:00-13:00			
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar främst färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.			

---

1. Lös samtliga obestämda integraler

a)

$$\int \frac{5+8x}{1+x^2}\,dx$$

Lösningstips: $5\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 4\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 5\arctan x + 4\ln(1+x^2) + C$

b)

$$\int \ln 3x\,dx$$

Lösningstips: Partiell integration ger $\int 1 \cdot \ln 3x\,dx = \cdots = x\ln 3x - x + C$

c)

$$\int 5\sin^4 x\cos x\,dx$$

Lösningstips: $\int 5\sin^4 x\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x \\ \frac{du}{dx} = \cos x \\ \text{"}du = \cos x\,dx\text{"} \end{matrix} \right| = \int 5u^4 dx = u^5 + C = \sin^5 x + C$

(3 p)

2. Korta frågor:

a) Ge exempel på en funktion som är strängt konkav.

Svar: Till exempel $f(x) = \ln x$

b) Ge exempel på en funktion som är begränsad uppåt och neråt men saknar största och minsta värde.

Svar: Till exempel $f(x) = \arctan x$

c) Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte deriverbar i origo.

Svar: Till exempel $f(x) = |x|$

d) Ge exempel på en funktion som saknar vänsterderivata i sin högra ändpunkt.

Svar: Till exempel $f(x) = \arcsin x$

e) Ge exempel på en funktion som är diskontinuerlig i $x = 0$.

Svar: Till exempel $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

f) Ge exempel på en funktion som har invers trots att den varken är strängt växande eller strängt avtagande.

Svar: Till exempel $f(x) = \frac{1}{x}$

(3 p)

3.

a) Härled derivatan till

$$f(x) = \tan x$$

genom att utgå ifrån en andra kända derivator.

Lösningstips: $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ deriveras med kvotregeln och förenklas därefter till $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ eller $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b) Härled derivatan till

$$y = \arcsin x$$

genom att utgå ifrån en annan känd derivata.

Lösningstips: Låt $\sin y = x$ och derivera enligt kedjeregeln (implicit derivata) och förenkla sedan med hjälp av ”trigettan” till $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3 p)

4. Låt

$$f(x) = x + x^{\frac{1}{3}}$$

a) Visa att $f(x)$ har invers.

Lösningstips: Eftersom $f'(x) = 1 + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} > 0$ för alla x följer enligt sats 4.8 att funktionen är strängt växande och därmed är funktionen omvändbar och har invers.

b) Beräkna

$$(f^{-1})'(10)$$

Lösningstips: Sats 4.6 eller resonemang utifrån symmetri utifrån, $y = x$ med symmetripunkter $(8, 10)$ hos ordinarie funktion och $(10, 8)$ hos inversen, ger $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(8)} = \frac{1}{\frac{13}{12}} = \frac{12}{13}$

(3 p)

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} kx + m & , \quad x \leq 9 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 9 \end{cases}$$

och bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar.

Lösningstips:

Högergränsvärdet bestäms i skarven:

$$\lim_{x \to 9^+} f(x) = \lim_{x \to 9^+} \sqrt{x} = 3.$$

Därmed vet man att punkten $(9, 3)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(9, 3)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$f'_{höger}(4) = \lim_{x \to 9^+} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \to 9^+} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 9^+} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$= \lim_{x \to 9^+} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \to 9^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$$

Därmed vet man dessutom att $k = \frac{1}{6}$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 9$. Annars skulle punkten $(9, 3)$ bli en singulär punkt (utifrån derivatan). Insättning av punkten och k-värdet i "räta linjens ekvation" $y = kx + m$ ger sedan att $m = \frac{3}{2}$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{3}{2} & \text{för} \quad x \leq 9 \\ \sqrt{x} & \text{för} \quad x > 9 \end{cases}$$

(3 p)

6. Låt

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

a) Bestäm eventuella asymptoter.

Lösningstips: Metod – se exempel 4.28 i Läroboken.

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ respektive $\lim_{n\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ ger i båda fallen $k_1 = k_2 = 1$ som möjliga k-värden till två eventuella sneda asymptoter.

Vidare får man m-värden $\lim_{n\to\infty} (f(x) - x) = m_1 = -\pi$ och $\lim_{n\to-\infty} (f(x) - x) = m_2 = \pi$. Sneda asymptoter existerar alltså enligt $y = x - \pi$ då $x \to \infty$ och $y = x + \pi$ då $x \to -\infty$.

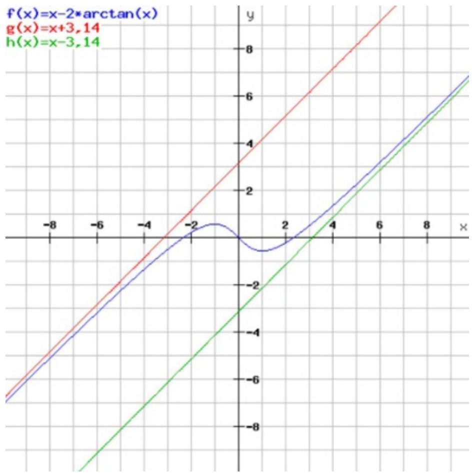
Lodrät asymptot saknas då $D_f = \mathbb{R}$.

b) Beräkna eventuella stationära punkter.

Lösningstips: Derivatan $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2}$ teckenstuderas och ger lokalt maximum i $x = -1$ och lokalt minimum i $x = 1$.

c) Skissa kurvan till $f(x)$ med tillhörande asymptoter.

Svar:



(3 p)

7. Låt

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\arcsin x - \cos(\pi x)$$

Visa med hjälp av lämplig sats att funktionen har minst en inre punkt med $f'(x) = 4$.

Lösningstips:

Funktionen deriverbar och har den slutna definitionsmängden $x \in [-1, 1]$.

Ändpunkterna har funktionsvärdena

$$f(1) = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - (-1) = 5 \text{ och } f(-1) = \frac{8}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - (-1) = -3$$

Medelvärdessatsen för derivata har alla villkor uppfyllda.

Därmed gäller för minst en inre punkt $x = \xi$ sådan att

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{8}{2} = 4$$

(3 p)