Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2023

Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU22
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23
Skrivtid:	2024-03-13 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Lös de obestämda integralerna

a)

$$\int \frac{4x+3}{1+x^2}\,dx$$

Svar: $2\ln(1+x^2) + 3\arctan x + C$

b)

$$\int e^{x^2} 8x\,dx$$

Svar: $4e^{x^2} + C$

c)

$$\int e^{2x} x^2\,dx$$

Svar: $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$

3 p

2. Låt

$$f(x) = \frac{2x^2+10}{x-2}$$

a) Bestäm samtliga stationära punkter.

Ledning:

$$f'(x) = \frac{4x(x-2)-(2x^2+10)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2-4x-5)}{(x-2)^2} = \frac{2(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$$

Ger stationära punkter : $x = -1$ och $x = 5$

b) Bestäm eventuella asymptoter.

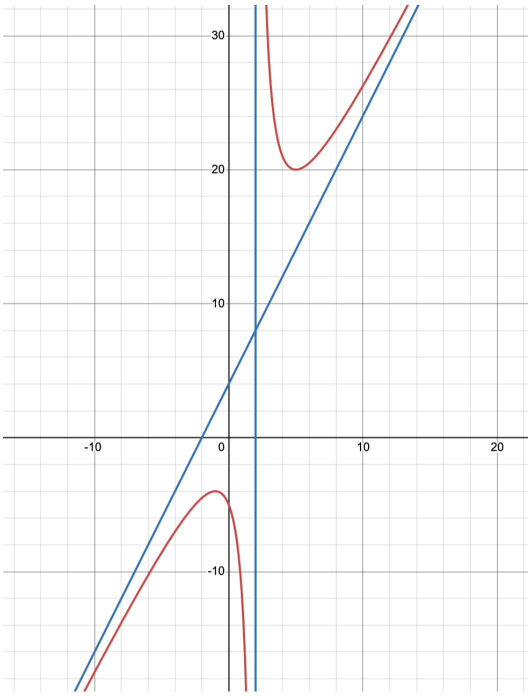
Ledning:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 10}{x - 2} = \left|\begin{matrix}\text{Polynom} - \\ \text{division}\end{matrix}\right| = 2x + 4 + \frac{18}{x - 2}$$

Studier av gränsvärden ger asymptoterna $x = 2$ och $y = 2x + 4$

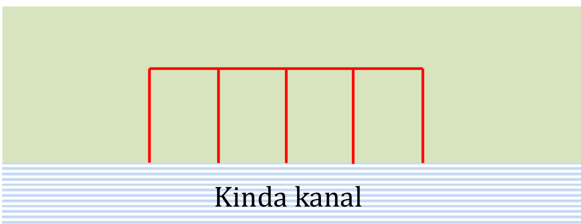
c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.

Svar:



3 p

3. En hästhage med fyra lika stora betesytor längs med Kinda kanal inhägnas med fem staket vinkelrätt mot kanalen ett staket parallellt med kanalen (se figur nedan) – totalt 600 m staket. Beräkna den totala maximala arean.



Ledning: Ekvationen $A = x(600 - 5x)$ studeras och man finner stationär punkt som ger ett maximum (vilket visas genom teckenstudie av derivatan eller med hjälp av andraderivatan) för $x = 60$ som ger den maximala arean 18 000 m² = 1.8 ha.

3 p

4. Ge exempel på funktioner $f(x)$ som stämmer med följande beskrivningar:

a) Är strängt växande och stängt konkav

b) Har begränsad värdemängd men obegränsad definitionsmängd

c) Saknar derivata i sin minimipunkt

d) Saknar högerderivata i sin vänstra ändpunkt

e) Har $f''(x) = 0$ i sitt maximipunkt

f) Har oändligt många inflexionspunkter

Svar: Till exempel

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

d) $f(x) = \arccos x$

e) $f(x) = -x^4$

f) $f(x) = \tan x$

3 p

5. Undersök om

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är deriverbar i $x = 0$

Ledning:

Visserligen är $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$ ty $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \underbrace{x^2 \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{begr}}}_{\to 0} \right) = 1$ men detta räcker inte alltid för att $f(x)$ dessutom ska vara deriverbar i $x = 0$.

Användning av derivatans definition i punkten $x = 0$ enligt

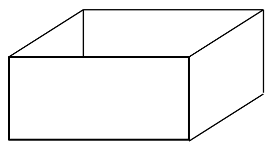
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 \cos \frac{1}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{begr}} = 0$$

visar att gränsvärdet 0 existerar från båda hållen och därmed är $f(x)$ deriverbar i $x = 0$ med $f'(0) = 0$

3 p

6.

En låda av plåt har formen av ett rätblock med kvadratisk bottenyta och saknar lock. Beräkna den minimala arean av plåten (botten + fyra lika sidor) för en låda med volymen 4 liter = 4000 cm³.



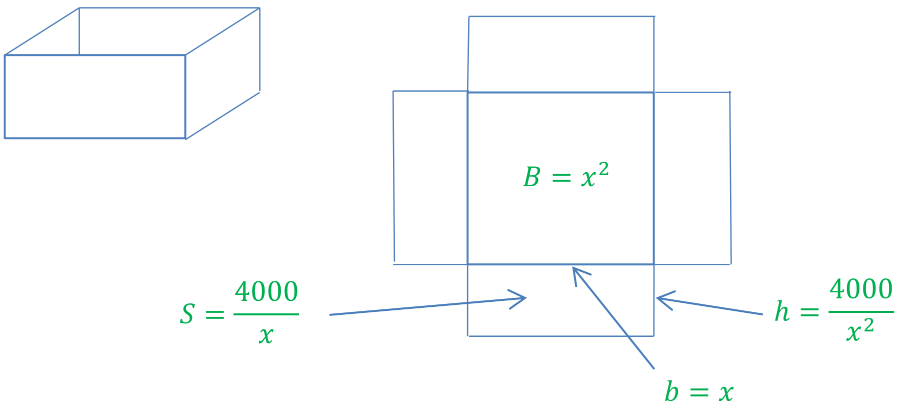
3 p

Lösningstips

Genom att välja baskanten $b = x$ får man en basyta med arean $B = x^2$

Höjden fås genom att volymen 4000 cm² delas med basytan enligt $h = \frac{4000}{x^2}$

En sidoytas area genom baskanten gånger höjden enligt $S = \frac{4000}{x}$



Arean blir därmed $A = B + 4S = x^2 + \frac{16000}{x}$ för $x \geq 0$

Teckenstudium av derivatan $A' = 2x - \frac{16000}{x^2}$

ger minimum för $x = 20$ och

insättning ger den minimala arean $A = 1200 \text{ cm}^2$.

7. Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd:

$$f(x) = \arccos \frac{x}{2 - x^2}$$

3 p

Lösningstips:

Funktionen $\arccos y$ kräver att $-1 \leq y \leq 1$ och detta gör att följande dubbel-olikhet måste uppfyllas:

$$-1 \leq \frac{x}{2 - x^2} \leq 1 \iff \frac{x^2 - 2}{2 - x^2} \leq \frac{x}{2 - x^2} \leq \frac{2 - x^2}{2 - x^2} \iff \frac{x^2 - 2}{2 - x^2} \leq \frac{x}{2 - x^2} \leq \frac{2 - x^2}{2 - x^2}$$

Den högra olikheten faktoriseras och studeras:

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)} \leq 0$$

Teckenstudium ger för den högra olikheten ger:

$$D_{f1} = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]-\sqrt{2}, 1\right] \cup \left]\sqrt{2}, \infty\right[$$

Den vänstra olikheten faktoriseras och studeras:

$$\frac{(x - 2)(x + 1)}{(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)} \leq 0$$

Teckenstudium ger för den vänstra olikheten ger:

$$D_{f2} = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left[-1, \sqrt{2}\right[\cup \left[2, \infty\right[$$

Snittet av dessa två mängder ger nu definitionsmängden

$$D_f = \left]-\infty, -2\right] \cup [-1, 1] \cup \left[2, \infty\right[$$

Det mellersta sammanhängande intervallet av definitionsmängden $[-1, 1]$ har ändpunkter med funktionsvärdena 0 och π.

Enligt satsen om mellanliggande värden måste alla funktionsvärden inom intervallet $[0, \pi]$ existera. Då inga ytterligare funtionsvärden kan existera för $\arccos y$ gäller att

$$V_f = [0, \pi]$$