Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna.
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp.
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna ovan.
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats.
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2023

Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU22
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23
Skrivtid:	2024-08-20 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1.

a) Härled formeln för partiell integration, med hjälp av deriveringsregeln för en produkt.

Lösningstips: Genom att start med exempelvis produkten $F(x)g(x)$

får man enligt deriveringsregeln för produkt

$$\big(F(x)g(x)\big)' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Integration med avseende på x ger

$$F(x)g(x) = \int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)\,dx$$

som efter sortering ger formeln

$$\boxed{\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx}$$

b) Lös den obestämda integralen

$$\int e^{2x} \sin 2x \, dx$$

Lösningstips: Partiell integration ger under ”andra varvet”
den ursprungliga integralen i högerledet. Denna flytas till vänsterledet
och man får svaret

$$\frac{e^{2x}}{4}(\sin 2x - \cos 2x) + C$$

3 p

2.

a) Låt

$$f(x) = \ln x$$

och bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Derivatans definition ger

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\substack{\text{sgv} \\ \to 1}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

b) Låt

$$y = \arctan x$$

och bestäm y' med hjälp av en annan funktions kända derivata och kedjeregeln.

Lösningstips: $y = \arctan x$ ger $\tan y = x$ som efter ledvis derivering enligt kedjeregeln med avseende på x ger

$$\left(\underbrace{1 + \tan^2 y}_{\text{känd derivata}}\right) y' = 1$$

så att $y' = \frac{1}{1+\tan^2 y}$ som med $\tan y = x$ ger

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

3 p

3. Låt

$$f(x) = 6x^2 - x^3$$

och bestäm tangentens ekvation inflexionspunkt.

Lösningstips: $f''(x) = 12 - 6x$ skiftar tecken i $x = 2$ som därmed är inflexionspunkten.
$f''(x) = 12x - 3x^2$ ger i $x = 2$ tangentens $k = 12$
som tillsammans med punkten $(2, 16)$ sätts in i $y = kx + m$ så att man får tangentens ekvation $y = 12x - 8$.

3 p

4. Låt

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

a) Bestäm eventuella asymptoter.

Lösningstips:

Lodräta asymptoter saknas eftersom $D_f = \mathbb{R}$.

Metoden i exempel 4.28 i läroboken ger:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - 2\frac{\overbrace{\arctan x}^{\text{begr}}}{x} = 1 - 0 = 1$$

Respektive

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 2\arctan x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - 2\frac{\overbrace{\arctan x}^{\text{begr}}}{x} = 1 - 0 = 1$$

Alltså $k_1 = k_2 = 1$ för eventuella sneda asymptoter.

Vidare fås eventuella m-värden

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = m_1 = -\pi$$

och $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = m_2 = \pi$.

Sneda asymptoter existerar alltså enligt

$y = x - \pi$ då $x \to \infty$

Och

$y = x + \pi$ då $x \to -\infty$

b) Beräkna eventuella stationära punkter.

Lösningstips: Derivatan

$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = 0$ ger de stationära punkterna

$x = \pm 1$

c) Skissa kurvan $y = f(x)$ med tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Värdetabellen punkterna

x	$y = f(x) = x - 2\arctan x$
-1	$-1 - 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx \frac{3.14}{2} - 1 = 0.57$
0	0
1	$1 - 2\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} \approx 1 - \frac{3.14}{2} = -0.57$

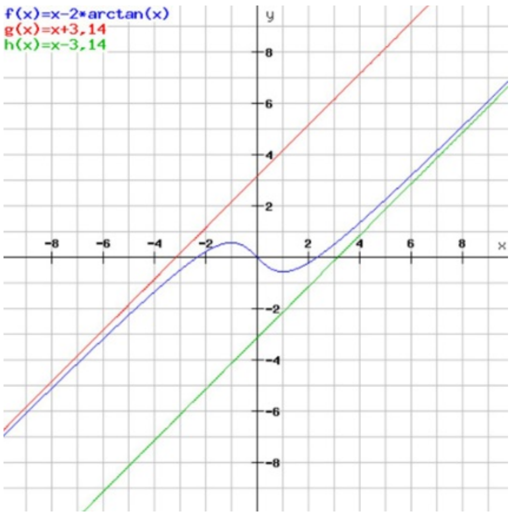
och de sneda asymptoterna

$y = x - \pi$ (då $x \to \infty$)

och

$y = x + \pi$ (då $x \to -\infty$)

ger skissen:



3 p

5. Låt

$$f(x) = 2x - \sin x$$

a) Visa att $f(x)$ har en invers $f^{-1}(x)$.

Lösningstips: $f'(x) = 2 - \cos x > 0$ för alla x –värden

vilket visar att $f(x)$ är strängt växande och därmed existerar inversen $f^{-1}(x)$.

b) Beräkna inversens derivata i $x = 2\pi$.

Lösningstips: Eftersom vi inte kan bestämma inversen $f^{-1}(x)$ och inte heller dess derivata $(f^{-1})'(x)$ tvingas vi undersöka spegelpunkten hos funktionen $f(x)$.
En skiss med symmetrilinjen $y = x$ och de båda funktionernas kurvor underlättar resonemanget.
Om $x = 2\pi$ hos inversen $f^{-1}(x)$ måste $y = 2\pi$ i spegelpunkten hos den ordinarie funktionen.
Den enda punkten hos den strängt växande ordinarie funktionen som ger $y = 2\pi$ är punkten $x = \pi$ så att $f(\pi) = 2\pi - \sin\pi = 2\pi - 0 = 2\pi$.
Derivering av den ordinarie funktionen ger $f'(x) = 2 - \cos x$ som i $x = \pi$ ger derivatan $f'(\pi) = 2 - \cos\pi = 3$.
En tangent i denna punkt $(\pi, 2\pi)$ har därmed $k = 3$.
Spegling tillbaka till inversen ger en tangent med $k = \frac{1}{3}$ så att den sökta derivatan i $x = 2\pi$ är $(f^{-1})'(2\pi) = \frac{1}{3}$.

3 p

6.

Låt

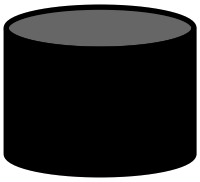
$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(x \sin \dfrac{1}{x^2}\right) & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

och undersök om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$.

Lösningstips: Eftersom den inre funktionen $\sin\frac{1}{x^2}$ är en begränsad funktion kommer produkten $x \underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\text{begr.}} \to 0$ då $x \to 0$. Därmed måste $\cos\left(x \sin\frac{1}{x^2}\right) \to \cos 0 = 1$ då $x \to 0$.
Då detta inte överensstämmer med $f(0) = 0$ råder inte kontinuitet i $x = 0$ enligt Definition 3.5 i läroboken.
Man får i praktiken en punkt i $(0, 0)$ under ett hål i $(0, 1)$

3 p

7. En konservburk med formen av en rak cirkulär cylinder har volymen 1 dm³. Bestäm burkens minsta möjliga begränsningsarea (2 basytor + mantelyta).



Lösningstips: Inledande samband för volym, basyta, omkrets,

mantelyta och total area ställs upp: $\begin{cases} V = Bh \\ B = \pi r^2 \\ O = 2\pi r \\ M = 2\pi r h \\ A = 2B + M \\ V = 1 \end{cases}$

Alltså gäller för $r \neq 0$ att $V = Bh = 1 = \pi r^2 h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{\pi r^2}$

Man får $A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$

Derivering ger $A'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}$

$A'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$

Teckenstudium av derivatan visar att denna radie ger lokalt minimum

och insättning ger minimala arean

$$A = 2B + M = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)^2 + \frac{2}{\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}} = 3(2\pi)^{\frac{2}{3}} \approx 5{,}54\ \text{dm}^2$$

3 p