Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2024

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR8
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare, kurvmall
Skrivtid:	2025-03-18 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Lös de obestämda integralerna:

a)

$$\int 8x \cos x^2 \; dx$$

Lösningstips:

Variabelskifte $u = x^2$ ger $4 \int \cos u \, du = \cdots = 4 \sin x^2 + C$.

b)

$$\int \ln 3x \; dx$$

Lösningstips:

Partiell integration ger svaret: $x \ln 3x - x + C$

c)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Lösning:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$$

3 p

2. Låt

$$f(x) = \frac{27}{x^3} + x - 3$$

a) Bestäm eventuella stationära punkter.

Lösning:

$f'(x) = 1 - \frac{81}{x^4} = 0$ ger $x = \pm 3$

b) Bestäm samtliga asymptoter.

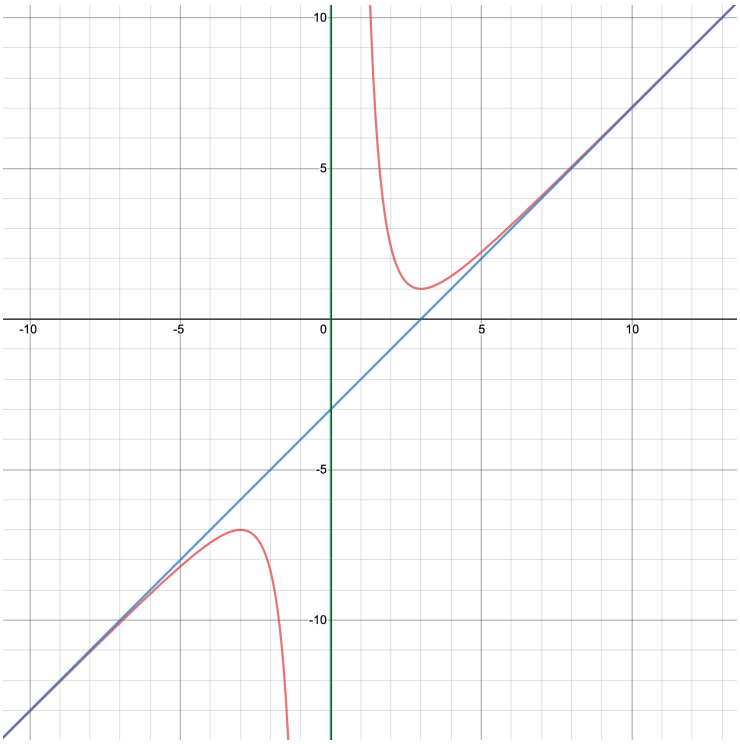
Lösningstips:

Gränsvärdesberäkningar enligt exempel 4.28 i läroboken eller tillhörande enligt anmärkning 4.3 (med polynomdivision) i läroboken ger sned asymptot $y = x - 3$. Gränsvärdesberäkningar med $x \to 0^+$ respektive $x \to 0^-$ ger lodrät asymptot i $x = 0$.

c) Skissa kurva med tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Värdetabell tillsammans med informationen i a) och b) ger:



3 p

3. Låt

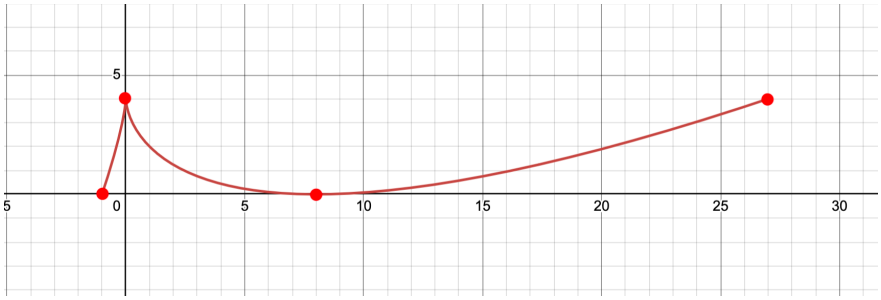
$$f(x) = x + 4 - 3x^{\frac{2}{3}} \quad , \quad x \in [-1, 27]$$

och bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter hos funktionen

(3 p)

Lösningstips:

Ändpunkter, singulära punkter och stationära punkter kontrolleras. För denna funktion får man lokala minimipunkter i ändpunkten $x = -1$ och i den stationära punkten $x = 8$ samt lokala maximipunkter i ändpunkten $x = 27$ och i den singulära punkten $x = 0$ där derivata saknas – deras karaktär fås genom teckenstudie av derivatan mellan dessa fyra punkter:



3 p

4. Låt

$$f(x) = x^3 + x$$

a) Visa att funktionen har en invers.

Lösning:

Eftersom funktionen har en sammanhängande definitionsmängd och att

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

så är funktionen sträng monoton (strängt växande) och har därmed invers enligt sats.

b) Beräkna

$$(f^{-1})'(30)$$

Lösningstips:

Beräkning enligt Sats 4.6 i läroboken – se även med resonemang utifrån symmetri enligt figur 4.8 efter sats 4.6 – ger svaret $\frac{1}{28}$.

3 p

5. Medelvärdessatsen för derivata

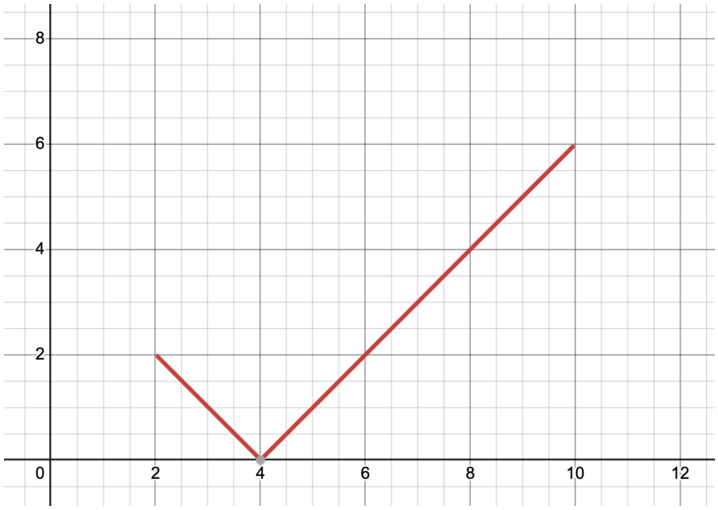
a) Formulera satsen och rita en förklarande skiss – vad säger satsen och vilka är villkoren?

Lösningstips: Se sats 4.10 i läroboken.

a) Förklara med text och skiss och varför satsen inte gäller ifall funktionen inte är deriverbar i en inre punkt av det aktuella intervallet.

Lösningsexempel:

Funktionen $f(x) = |x - 4| \ \ , \ \ x \in [2, 10]$



ger för medelvärdssatsen $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ men inte ett enda värde $x = \xi$ inom aktuellt intervall ger $f'(\xi) = \frac{1}{2}$.

3 p

6. Lös olikheten

$$\ln(x^2 - 4) \leq \ln(x + 2)$$

Lösning:

Innan olikheten löses:

Vänsterledets logaritm kräver att $x^2 - 4 > 0 \iff (x + 2)(x - 2) > 0$

som efter teckenstudie ger kravet $x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

Högerledets logaritm kräver att $x + 2 > 0$ som ger kravet $x \in]-2, \infty[$

Snittet av ovanstående två krav blir $x \in]2, \infty[$ som är olikhetens

definitionsmängd – alltså $x > 2$.

Dags att lösa olikheten…

$$\ln(x^2 - 4) \leq \ln(x + 2)$$
$$\iff e^{\ln(x^2-4)} \leq e^{\ln(x+2)}$$
$$\iff x^2 - 4 \leq x + 2 \quad \text{för} \quad x > 2$$
$$\iff x^2 - x - 6 \leq 0 \quad \text{för} \quad x > 2$$
$$\iff (x - 3)(x + 2) \leq 0 \quad \text{för} \quad x > 2$$

teckenstudie av $(x - 3)(x + 2) \leq 0$ ger förslaget $-2 \leq x \leq 3$

som i kombination med kravet $x > 2$ ger

Svar: $2 < x \leq 3$

3 p

7. Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd:

$$f(x) = \arccos\frac{x}{6-x^2}$$

3 p

Lösningstips:

Funktionen arccos y kräver att $-1 \le y \le 1$ och detta gör att följande dubbel-olikhet måste uppfyllas:

$$-1 \le \frac{x}{6-x^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-6}{6-x^2} \le \frac{x}{6-x^2} \le \frac{6-x^2}{6-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-6}{6-x^2} \le \frac{x}{6-x^2} \le \frac{6-x^2}{6-x^2}$$

Den högra olikheten faktoriseras och studeras:

$$\frac{x}{6-x^2} \le \frac{6-x^2}{6-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-6}{6-x^2} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+3)(x-2)}{(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}-x)} \le 0$$

Teckenstudium för den högra olikheten ger:

$$D_{f1} =]-\infty, -3] \cup]-\sqrt{6}, 2] \cup]\sqrt{6}, \infty[$$

Den vänstra olikheten faktoriseras och studeras:

$$\frac{x^2-6}{6-x^2} \le \frac{x}{6-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-x-6}{6-x^2} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x+2)}{(\sqrt{6}+x)(\sqrt{6}-x)} \le 0$$

Teckenstudium ger för den vänstra olikheten ger:

$$D_{f2} =]-\infty, -\sqrt{6}[\cup [-2, \sqrt{6}[\cup [3, \infty[$$

Snittet av dessa två mängder ger nu funktionens definitionsmängd

$$D_f =]-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, \infty[$$

Det mellersta sammanhängande intervallet av definitionsmängden $[-2, 2]$ har ändpunkter med funktionsvärdena 0 och π.

Enligt satsen om mellanliggande värden måste alla funktionsvärden inom intervallet $[0, \pi]$ existera. Då inga ytterligare funtionsvärden kan existera för arccos y gäller att $V_f = [0, \pi]$

Svar: $D_f =]-\infty, -3] \cup [-2, 2] \cup [3, \infty[$ och $V_f = [0, \pi]$