

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningssanteckningarna.
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp.
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningssanteckningarna ovan.
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats.
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2024

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR8
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare, kurvmall
Skrivtid:	2025-08-19 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1.

a) Härled formeln för partiell integration, med hjälp av deriveringsregeln för en produkt.

Lösningstips: Genom att starta med exempelvis produkten $F(x)g(x)$

får man enligt deriveringsregeln för produkt

$$(F(x)g(x))' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Integration med avseende på x ger

$$F(x)g(x) = \int f(x)g(x) dx + \int F(x)g'(x) dx$$

som efter sortering ger formeln

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

b) Lös den obestämda integralen

$$\int x^2 \cos x dx$$

Lösningstips: Partiell integration två varv ger svaret

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

3 p

2.

a) Låt

$$f(x) = e^{2x}$$

och bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Derivatans definition ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2(x+h)} - e^{2x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2x+2h} - e^{2x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2x}(e^{2h} - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(e^{2h} - 1)}{2h}}_{\substack{\text{sgv} \\ \rightarrow 1}} \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} \end{aligned}$$

b) Låt

$$y = \arcsin x$$

och bestäm y' med hjälp av en annan funktions kända derivata och kedjeregeln.

Lösningstips: $y = \arcsin x$ ger $\sin y = x$ som efter ledvis

derivering enligt kedjeregeln med avseende på x ger

$$\cos y \cdot y' = 1$$

så att $y' = \frac{1}{\cos y}$ som med hjälp av "trigettan" och $\sin y = x$ ger

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3 p

3. Låt

$$f(x) = \frac{x^2 + 16}{4x}$$

a) Bestäm eventuella asymptoter.

Lösningstips:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+16}{4x} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+16}{4x} = -\infty$$

visar att det finns en lodrät asymptot $x = 0$.

Metoden i exempel 4.28 i läroboken ger eventuell snedasymptot:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+16}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$$

Respektive

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+16}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$$

Alltså $k_1 = k_2 = \frac{1}{4}$ för eventuella sneda asymptoter.

Vidare fås eventuella m -värden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 16}{4x} - \frac{x}{4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4} - \frac{4}{x} - \frac{x}{4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} = m_1 = 0$$

Oc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 16}{4x} - \frac{x}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4} - \frac{4}{x} - \frac{x}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = m_2 = 0$$

Sneda asymptoter existerar alltså enligt

$$y = \frac{x}{4} \text{ då } x \rightarrow \infty$$

och

$$y = \frac{x}{4} \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

b) Beräkna eventuella stationära punkter.

Lösningstips:

$$f(x) = \frac{x^2+16}{4x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$$

ger derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{4}{x^2} = 0$$

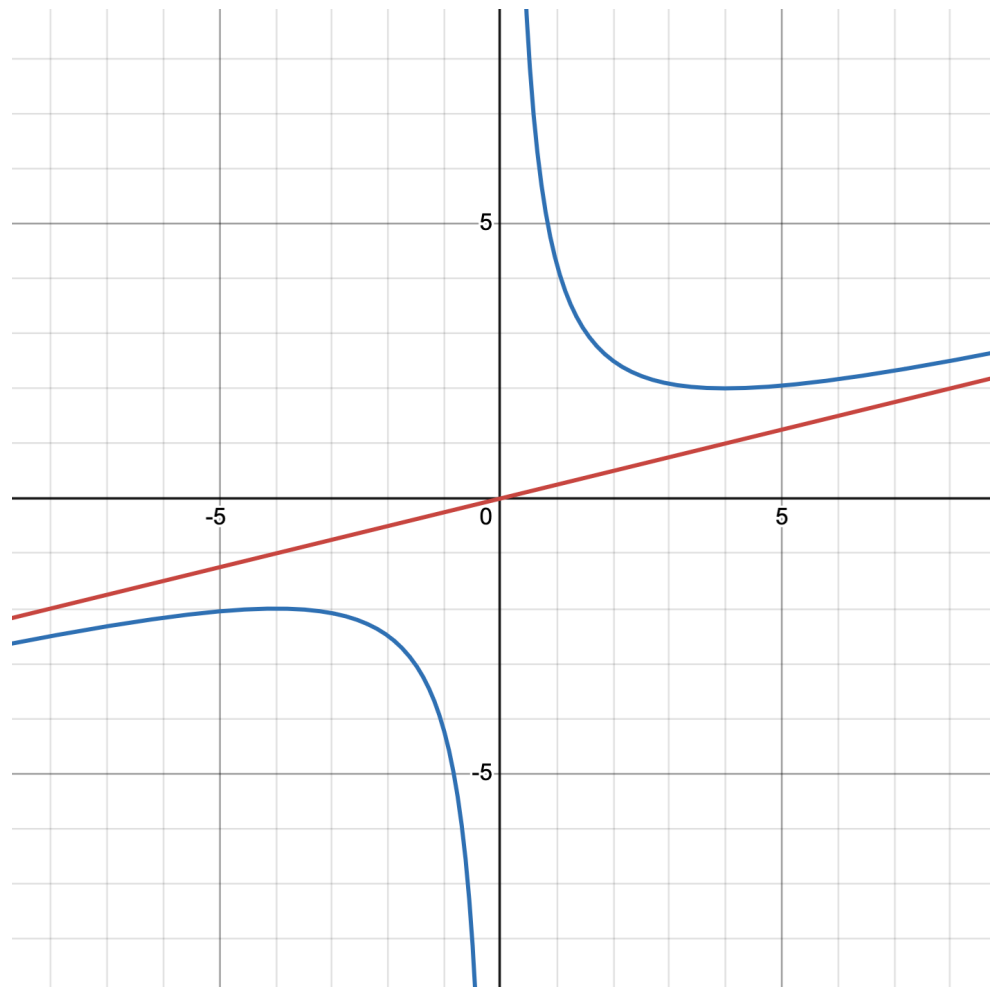
som ger de stationära punkterna

$$x = \pm 4$$

c) Skissa kurvan $y = f(x)$ med tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Värdetabell ger skissen:



3 p

4. Låt

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2$$

och bestäm tangentens ekvation i funktionens inflexionspunkt.

Lösningstips: $f''(x) = 12x - 24 = 0$ skiftar tecken i $x = 2$ som därmed är inflexionspunkten; alltså en s.k. "humörsskiftespunkt". Notera att det inte duger att hitta var $f''(x) = 0$ vilket inte ens är ett krav för alla typer av inflexionspunkter.

$f'(x) = 6x^2 - 24x$ ger i $x = 2$ tangentens $k = -24$ som tillsammans med punkten $(2, -32)$ sätts in i $y = kx + m$ så att man får tangentens ekvation $y = -24x + 16$.

3 p

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} kx + m & , \quad x \leq 9 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 9 \end{cases}$$

Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar.

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms i skarven:

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} \sqrt{x} = 3.$$

Därmed vet man att punkten $(9, 3)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(9, 3)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$\begin{aligned} f'_{höger}(9) &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

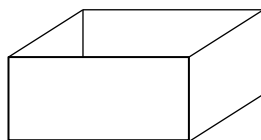
Därmed vet man dessutom att $k = \frac{1}{6}$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 9$. Annars skulle punkten $(9, 3)$ bli en singular punkt (utifrån derivatan). Insättning av punkten och k -värdet i "räta linjens ekvation" $y = kx + m$ ger sedan att $m = 1$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{3}{2} & \text{för } x \leq 9 \\ \sqrt{x} & \text{för } x > 9 \end{cases}$$

3 p

6.

En låda av plåt har formen av ett rätblock med kvadratisk bottenyta och saknar lock. Beräkna den minimala arean av plåten (botten + fyra lika sidor) för en låda med volymen 0,5 liter = 500 cm³.

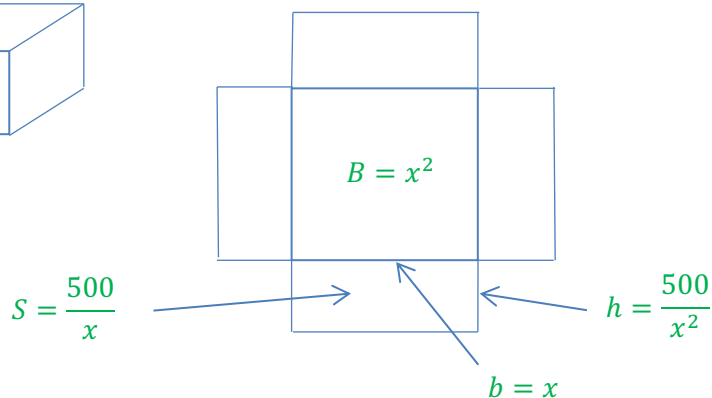
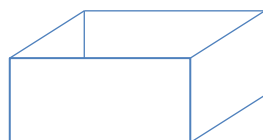


Lösningstips

Genom att välja baskanten $b = x$ får man en basyta med arean $B = x^2$

Höjden fås genom att volymen 500 cm³ delas med basytan enligt $h = \frac{500}{x^2}$

En sidoytas area genom baskanten gånger höjden enligt $S = \frac{500}{x}$



Arean blir därmed $A = B + 4S = x^2 + \frac{2000}{x}$ för $x \geq 0$

Teckenstudium av derivatan $A' = 2x - \frac{2000}{x^2}$

ger minimum för $x = 10$ och insättning ger den minimala arean $A = 300$ cm².

7. Visa med stöd av valfri sats att $f(x) = \arcsin x - 2 \arctan x$ har minst en stationär punkt.

Lösningstips: Funktionen har $D_f = [-1, 1]$ och för ändpunkter gäller $f(-1) = f(1) = 0$. Alltså är "lutningen mellan ändpunkterna = 0". Därmed måste det enligt Rolles sats (sats 4.11) eller *Medelvärdessatsen för derivator* (sats 4.10) finnas *minst en inre punkt* inom detta slutna intervall sådan att $f'(x) = 0$ och därmed finns minst en stationär punkt.

Fotnot: De stationära punkterna behöver alltså inte beräknas i denna uppgift; det räcker med att visa att minst en sådan finns, enligt ovan. Om man ändå föredrar att beräkna dem på klassiskt vis genom $f(x) = 0$ (sats 4.9) får man punkterna

$$x = \pm \sqrt[4]{3} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \pm \sqrt{\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})} = \pm \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx \pm 0.68$$

3 p