

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2025

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN1
Institution:	ITN
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR8
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall
Skrivtid:	2026-01-17 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1. Bestäm samtliga primitiva funktioner

a)

$$\int \frac{3 + 4x}{1 + x^2} dx$$

$$\text{Lösningstips: } 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx = 3 \arctan x + 2 \ln(1 + x^2) + C$$

b)

$$\int e^{x^2} 8x dx$$

Lösningstips:

$$\int e^{x^2} 8x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Kedjeregeln baklänges} \\ \text{eller variabelskifte} \end{array} \right| = 4e^{x^2} + C$$

c)

$$\int e^{2x} \sin 2x dx$$

$$\text{Lösningstips: Upprepad partiell integration ger } \frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x + C$$

2.

a) Låt

$$f(x) = \ln 2x$$

och bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Derivatans definition och standardgränsvärde ger

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln 2(x+h) - \ln 2x}{h} = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{2x+2h}{2x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x} = \frac{1}{x}$$

b) Låt

$$y = \arccos x$$

och bestäm y' med hjälp av en annan funktions kända derivata och kedjeregeln.

Lösningstips: $y = \arccos x$ ger $\cos y = x$ som efter ledvis

derivering med avseende på x enligt kedjeregeln ger

$$\underbrace{-\sin y}_{\substack{\text{känd} \\ \text{derivata}}} \cdot y' = 1$$

$$\text{så att } y' = -\frac{1}{\sin y} = \left| \begin{array}{l} \sin y > 0 \\ 1: a \text{ och } 2: a \\ \text{kvadranten} \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3 p

3. Låt

$$y = f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

a) Bestäm eventuella asymptoter till $f(x)$.

Lösningstips: Lodrät asymptot existerar i $x = 0$ påvisas fram med hjälp av gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

Eventuell sned asymptot har

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{4}{x^3} = 1$$

och

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+4}{x^2} - x = \dots = 0$$

Alltså sned asymptot $y = x$

b) Bestäm eventuella stationära punkter hos $f(x)$.

Lösningstips: Förstaderivatan tas fram och teckenstuderas

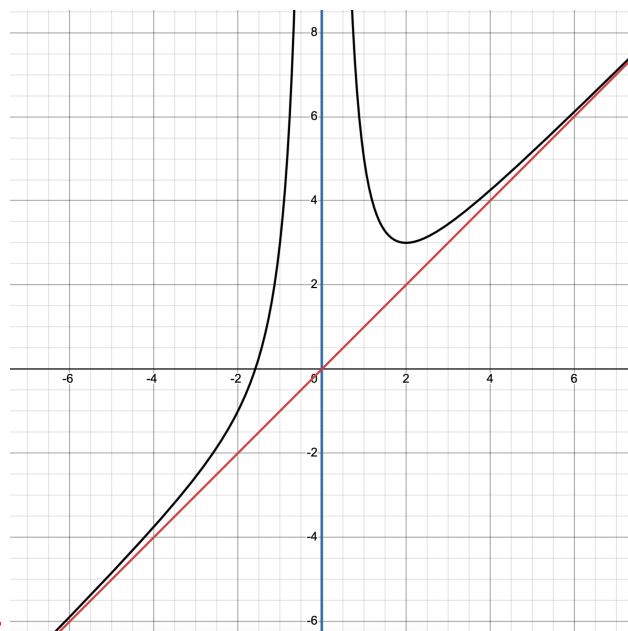
$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2} = \dots = x + 4x^{-2}$$
$$f'(x) = 1 - 8x^{-3} = \dots = \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \text{ då } x = 2$$

Teckenstudium av derivatan ger lokalt minimum i $x = 2$.

c) Skissa kurvan och eventuella asymptoter till $f(x)$.

Lösningstips: Asymptoterna $x = 0$ och $y = x$ markeras och med hjälp av värdetabell

skissas kurvan med tydligt markerat lokalt minimum i $(2, 3)$.



Svar:

3 p

4.

a) Bland vilka tre typer av punkter kan man finna en funktions lokala extrempunkter?

Svar: I eventuella ändpunkter (vid slutet intervall), i eventuella stationära punkter (där $f'(x) = 0$) samt i eventuella singulära punkter (där $f'(x)$ saknas trots att punkten ingår i definitionsmängden).

b) Bestäm största och minsta värde hos funktionen

$$f(x) = 52 + 2x - 9x^{2/3}, \quad x \in]-8, 64]$$

Lösningstips:

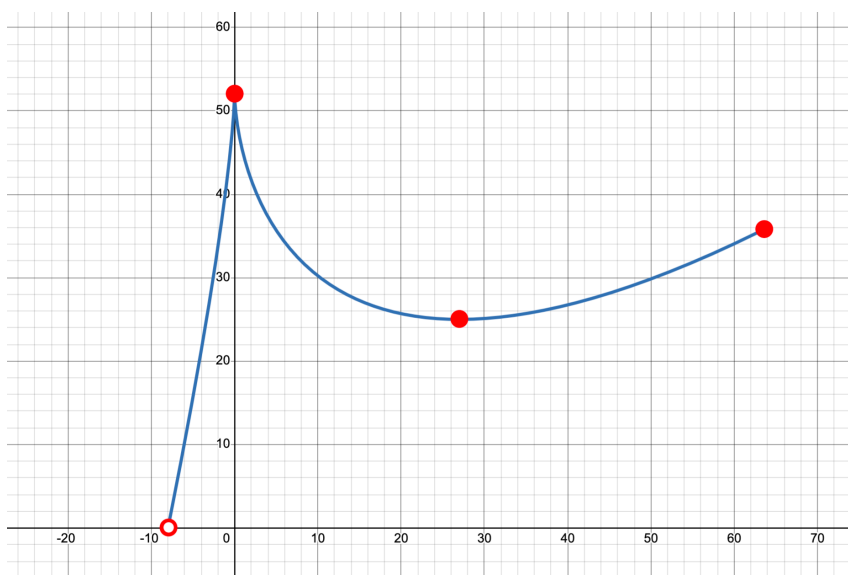
$$f'(x) = 2 - 6x^{-\frac{1}{3}} = 2 - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \text{då } x = 27$$

Lokala extrempunkter finner man bland

- (i) ändpunkten (64, 36),
- (ii) den inre stationära punkten (27, 25) och
- (iii) den singulära punkten (0, 52).

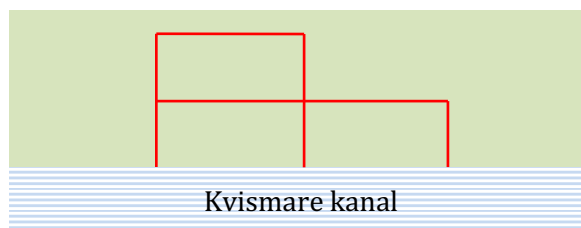
Den öppna änden i $(-8, 0)$ är också av intresse och fås med hjälp av gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow -8^+} f(x) = 0$ vilket är lägre än alla lokala extremvärden.

Sammanfattningsvis blir det största funktionsvärdet 52 och ett minsta funktionsvärde saknas då de lägsta funktionsvärdena finns omedelbart innanför den "öppna änden":



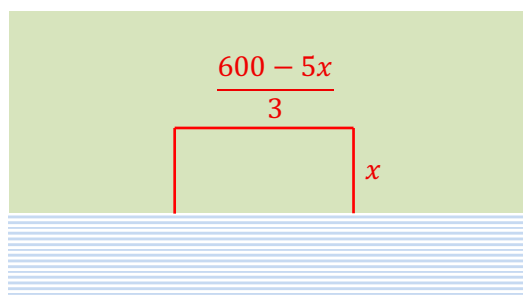
3 p

5. En hästhage med tre lika stora rektangulära betesytor ligger längs med den raka Kvismare kanal och inhägnas med staket enligt figuren nedan – totalt 600 m staket. Beräkna den totala maximala arean.



Ledning:

Om man väljer x som varje betesyta's "höjd" får varje betesyta "bredden" $\frac{600-5x}{3}$



och den totala arean blir

$$A(x) = 3x \frac{600 - 5x}{3} = 600x - 5x^2, \quad 0 \leq x \leq 60$$

Maximum söker man som vanligt bland:

- stationära punkter – i detta fall $x = 60$
- ändpunkter – i detta fall $x = 0$ respektive $x = 120$ vilka båda ger arean noll
- singulära punkter – i detta fall saknas sådana eftersom definitionsmängden för $A'(x)$ är densamma som för $A(x)$ så när som på ändpunkterna.

Teckenstudie av derivatan (eller negativ andraderivata) bekräftar att den stationära punkten derivatan $x = 60$ som ger den maximala (inte minimala) arean 18 000 m².

3 p

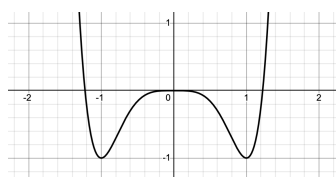
6. Rätt eller fel?

- a) Funktionen $f(x) = 2x^6 - 3x^4$ har ett lokalt maximum i $x = 0$ trots att andraderivatan inte är negativ i $x = 0$.

Rätt eller Fel? Motivera ditt svar med beräkningar.

Svar: Rätt.

Förstaderivatan är noll i den aktuella punkten – alltså rör det sig om en stationär punkt. Andraderivatan är tyvärr också noll i den aktuella punkten (inte negativ som hade gett lokalt maximum för en stationär punkt) och det kan därmed både röra sig om (1) en terrasspunkt, (2) ett lokalt maximum eller ett (3) lokalt minimum. Tack vare att förstaderivatan skiftar tecken från positiv till negativ i den aktuella punkten ger den samlade informationen att det rör sig om (2) ett lokalt maximum i $x = 0$.



b) Funktionen $f(x) = \tan x$ har oändligt många stationära punkter.

Rätt eller Fel? Motivera ditt svar med beräkningar.

Svar: Fel.

$$f'(x) = \underbrace{1 + \tan^2 x}_{>0} \neq 0$$

c) Funktionen $f(x) = \tan x$ har oändligt många inflexionspunkter.

Rätt eller Fel? Motivera ditt svar med beräkningar.

Svar: Rätt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \tan x \underbrace{(1 + \tan^2 x)}_{>0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

och $f''(x)$ skiftar tecken i just dessa punkter.

3 p

7. De två villkoren för att Sats 4.10 i läroboken – Medelvärdessatsen för derivator – skall gälla är att funktionen...

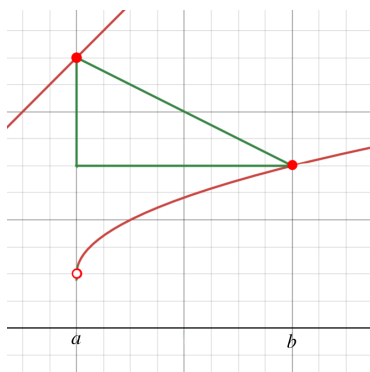
I. ...är kontinuerlig på intervallet kompakta intervallet $[a, b]$

och

II. ...är deriverbar på åtminstone det öppna intervallet $]a, b[$

a) Förklara med egna ord och en förklarande skiss varför satsen inte kan gälla om man nöjer sig med kontinuitet på det öppna intervallet $]a, b[$.

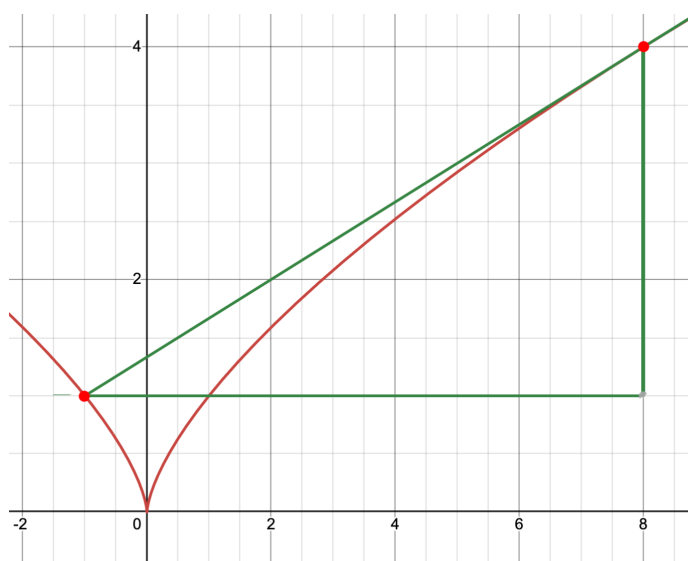
Ledning: Man kan exempelvis studera en funktions vars graf har följande utseende på intervallet $[a, b]$:



Alltså med en diskontinuitet i ena ändpunkten. Man inser i detta exempel att ingen inre punkt inom $]a, b[$ har samma derivata som differenskvoten ("lutningen") mellan ändpunkterna".

- b) Förklara med egna ord och en förklarande skiss varför satsen inte kan gälla om man struntar i kravet på deriverbarhet.

Ledning: Man kan exempelvis studera funktionen $f(x) = x^{2/3}$ på intervallet $[-1, 8]$:



Som synes är funktionen inte deriverbar i den inre punkten $x = 0$. Man inser i detta exempel att ingen inre punkt hos funktionen inom intervallet $] -1, 8[$ har samma derivata som differenskvoten ("lutningen") mellan ändpunkterna".