

Studietips inför kommande tentamen

TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2025

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare, kurvmall
Skrivtid:	2026-03-18 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1. Lös de obestämda integralerna:

a)

$$\int 4x \ln x \, dx$$

Lösningstips:

Partiell integration ger

$$\int 4x \ln x \, dx = x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{1}{x} \, dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C$$

b)

$$\int \frac{1}{9 + x^2} \, dx$$

Lösningstips:

$$\int \frac{1}{9 + x^2} \, dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} \, dx = \frac{1}{9} \frac{\arctan \frac{x}{3}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

c)

$$\int e^{x^2} 8x \, dx$$

Lösningstips:

Variabelskifte $u = x^2$ o.s.v. ger integralen $4 \int e^u \, du = 4e^u + C = 4e^{x^2} + C$

3 p

2. Låt

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$$

a) Bestäm eventuella stationära punkter.

Lösningstips:

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+5)1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2} = 0 \text{ ger } x_1 = 5, x_2 = -1$$

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips:

Gränsvärdesberäkningar enligt exempel 4.28 i läroboken ger sned asymptot

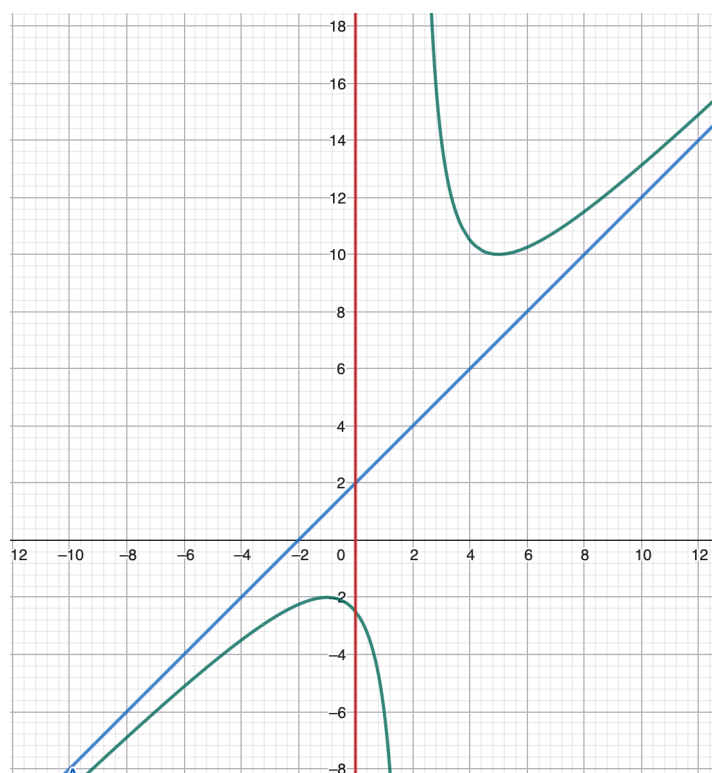
$$y = x + 2$$

Gränsvärdesberäkningar med $x \rightarrow 2^+$ respektive $x \rightarrow 2^-$ ger lodrät asymptot i $x = 2$

c) Skissa kurva med tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Värdetabell tillsammans med informationen i a) och b) ger:



3. Låt

$$f(x) = 6x^{2/3} - 2x - 8, \quad x \in [-1, 27]$$

och bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter.

Lösningstips:

Tre typer av punkter måste kontrollera – ändpunkter, stationära punkter och singulara punkter.

Ändpunkterna är $(-1, 0)$ respektive $(27, -8)$

$$\begin{cases} f'(x) = 4x^{-1/3} - 2 = \frac{4}{x^{1/3}} - 2, & x \neq 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$$

Stationär punkt är $(8, 0)$

Singulär punkt är $(0, -8)$

Sammanfattningsvis lokala minimipunkter i ändpunkten $x = 27$ och i den singulara punkten $x = 0$ där derivata sakna. Lokala maximipunkter i ändpunkten $x = -1$ och i den stationära punkten $x = 8$. Extrempunkternas karaktär fås genom teckenstudie och kurvan har följande utseende:



4. Låt

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & , \quad x > 0 \\ kx + m & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

och beräkna k och m så att funktionen blir deriverbar för alla x .

Lösning:

Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1$ visar att den räta linjens ändpunkt måste finnas i $(0, 1)$.

Med hjälp av derivatans definition och stöd av linjens ändpunkt får man vänsterderivatan i skarven:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \cdot \underbrace{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\substack{\text{sgv} \\ \rightarrow 1}} = 2$$

som dessutom är k -värdet för den rätan linjen om funktionen skall vara deriverbar i skarven. Därmed blir funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & , \quad x > 0 \\ 2x + 1 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

3 p

5. Medelvärdessatsen för derivata

- a) Formulera satsen och rita en förklarande skiss – vad säger satsen och vilka är villkoren för att den skall gälla?

Lösningstips:

Formulering av satsen – se sats 4.10 i läroboken.

Satsen säger att om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på ett kompakt intervall $x \in [a, b]$ och är deriverbar i alla inre punkter $x \in]a, b[$ så finns minst en inre punkt $x = \xi$ sådan att derivatan

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Med vardagsspråk kan man säga samma "lutning i minst en inre punkt" som "lutningen mellan intervallets ändpunkter".

b) Förklara med text och skiss och varför satsen inte gäller för funktionen

$$f(x) = |x - 4|, \quad x \in [2, 10]$$

Lösningstips:

Funktionen $f(x) = |x - 4|$, $x \in [2, 10]$

kan skrivas enligt

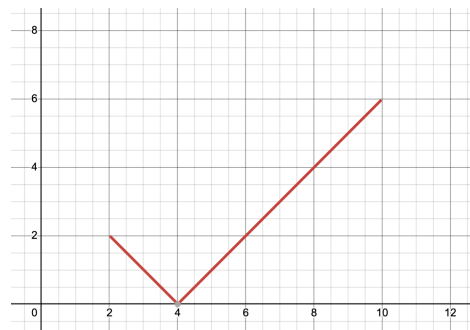
$$f(x) = \begin{cases} -x + 4 & , \quad x \in [2, 4] \\ x - 4 & , \quad x \in [4, 10] \end{cases}$$

I alla punkter där funktionen är deriverbar är derivatans värde -1 eller 1.

Differenskvoten mellan ändpunkterna är dock $\frac{6-2}{10-2} = \frac{1}{2}$ men inte in en enda

inre punkt $x = \xi$ inom det aktuella intervallet har derivatan $f'(\xi) = \frac{1}{2}$.

. Detta inträffar p.g.a. att funktionen inte är deriverbar i $x = 4$ och därmed är det inte OK att tillämpa medelvärdessatsen för derivata för denna funktion – i varje fall inte om punkten $x = 4$ är en inre punkt inom det aktuella intervallet.



3 p

6. Lös olikheten

$$4^x < 4^{\frac{x}{2}} + 12$$

Lösningstips:

Olikheten är definierad för alla reella tal.

$$4^x < 4^{x/2} + 12$$

$$\Leftrightarrow 4^x - 4^{x/2} - 12 < 0$$

$$\Leftrightarrow (4^{x/2})^2 - 4^{x/2} - 12 < 0$$

Variabelskiftet $y = 4^{x/2}$ med $y > 0$

$$\Leftrightarrow y^2 - y - 12 < 0, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 4)(y + 3) < 0, \quad y > 0$$

Teckenstudium av faktorerna ger spontant intervallet

$y \in]-3, 4[$ men eftersom $y > 0$ duger endast

$$y \in]0, 4[$$

Tack vare att $y = 4^{x/2}$ är strängt växande inser man att ändarna av intervallet ger de

högsta/lägsta värdena så att

$$4^{\frac{x}{2}} \in]0, 4[$$

$$\Leftrightarrow \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x \in]0, 4[$$

$$\Leftrightarrow 2^x \in]0, 4[$$

Tack vare att $y = 2^x$ är strängt växande inser man att ändarna av intervallet ger de

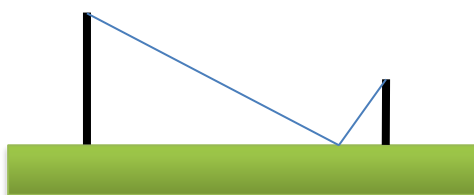
högsta/lägsta värdena så att

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2[$$

3 p

7. Minimera linans längd

På en jämn yta finns två lodräta stolpar med avståndet 12 meter. Den ena är 6 meter hög och den andra 3 meter hög. En lina skall spännas från toppen av den ena stolpen, ner till marken och vidare till den andra stolpens topp. Visa genom en max- och min-studie att linans minimala längd blir 15 meter.



Lösningstips:

Den vågräta sträckan 12 m delas in i delsträckorna x respektive $12 - x$ så att Pythagoras Sats kan användas för linans totala längd enligt:

$$s(x) = \sqrt{6^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + (12 - x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Förenkling ger

$$s(x) = \sqrt{36 + x^2} + \sqrt{x^2 - 24x + 153}$$

med derivatan

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 153}}$$

som är definierad för *alla* x ty nämnarna är båda strängt positiva.

Därmed saknas både ändpunkter och singulära punkter (derivatan existerar för alla x) så att enbart stationära punkter är av intresse:

$$s'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 153}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} = -\frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 153}}$$

Båda leden kvadreras (risk för att falska rötter uppkommer) och ekvationen löses

$$\frac{x^2}{36 + x^2} = \frac{x^2 - 24x + 144}{x^2 - 24x + 153}$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 24x + 153) = (36 + x^2)(x^2 - 24x + 144)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 24x^3 + 153x^2 = x^4 - 24x^3 + 180x^2 - 864x + 5184$$

$$\Leftrightarrow 27x^2 - 864x + 5184 = 0$$

Division med 3 upprepade gånger ger

$$x^2 - 32x + 192 = 0$$

och kvadratkomplettering eller faktorisering enligt

$$(x - 24)(x - 8) = 0$$

ger förslagen punkterna i $x = 24$ eller $x = 8$ men insättning i den ursprungliga ekvationen visar att $x = 24$ är en "falsk rot" som p.g.a. kvadreringen. Teckenstudium av derivatan visar att $x = 8$ ger ett minimum och minimilängden blir

$$s(8) = \sqrt{6^2 + 8^2} + \sqrt{3^2 + (12 - 8)^2} = \sqrt{100} + \sqrt{25} = 15$$