

Studietips inför kommande tentamen

TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningssanteckningarna.
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp.
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningssanteckningarna ovan.
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats.
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2025

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR8
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare, kurvmall
Skrivtid:	2026-08-17 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1. Lös de obestämda integralerna.

a)

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

Lösningstips: Partiell integration två varv ger svaret $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

b)

$$\int 8x \cos x^2 \, dx$$

Lösningstips: Variabelskifte eller Kedjeregeln baklänges ger svaret $4 \sin x^2 + C$

c)

$$\int \frac{4 + 6x}{1 + x^2} \, dx$$

Svar: $4 \arctan x + 3 \ln(1 + x^2) + C$

2.

a) Låt

$$f(x) = \ln 3x$$

och bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Derivatans definition ger

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \left| \begin{array}{l} \text{Med} \\ f(x) = \ln 3x \end{array} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln 3(x+h) - \ln 3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{3(x+h)}{3x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{\text{sgv}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

b) Låt

$$y = \arctan x$$

och bestäm y' med hjälp av en annan funktions kända derivata och kedjeregeln.

Lösningstips: $y = \arctan x$ ger $\tan y = x$ som efter ledvis

derivering enligt kedjeregeln med avseende på x ger

$$(1 + \tan^2 y)y' = 1$$

så att $y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + (\tan y)^2}$ som med $\tan y = x$ ger

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

3 p

3. Låt

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 32}{x^2}$$

a) Bestäm eventuella asymptoter.

Lösningstips:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x^2 + 32}{x^2} = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x^2 + 32}{x^2} = \infty$$

visar att det finns en lodrät asymptot $x = 0$

Metoden i exempel 4.28 i läroboken ger eventuell snedasymptot:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 + 32}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{4}{x} + \frac{32}{x^3} = 1 = k$$

Alltså $k_1 = k_2 = 1$ för eventuella sneda asymptoter.

Vidare fås eventuella m -värden

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 + 32}{x^2} - x = \dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 - \frac{32}{x^2} = m = 1$$

Sned asymptot existerar alltså enligt

$y = x + 1$ då $x \rightarrow \infty$ och då $x \rightarrow -\infty$

b) Beräkna eventuella stationära punkter.

Lösningstips:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 32}{x^2} = x + 1 + \frac{32}{x^2}$$

ger derivatan

$$f'(x) = 1 - \frac{64}{x^3} = 0$$

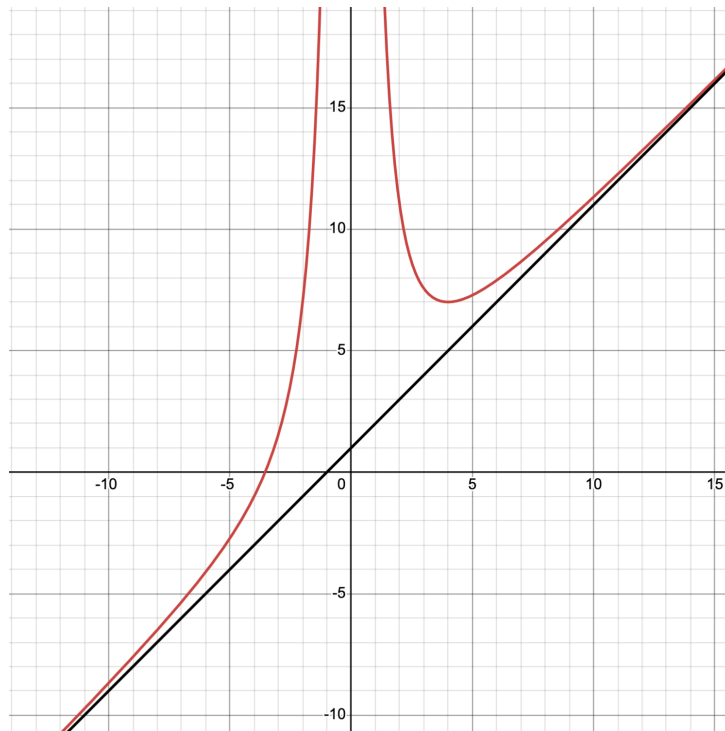
som ger den stationära punkten

$$x = 4$$

c) Skissa kurvan $y = f(x)$ med eventuella tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Värdetabell ger skissen:



3 p

4. Låt

$$f(x) = x^4 - 2x^3$$

och bestäm tangentens ekvation i den inflexionspunkt som inte samtidigt är en stationär punkt.

Lösningstips:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) = 0 \text{ i } x = 0 \text{ respektive } x = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \text{ och skiftar tecken i } x = 0 \text{ respektive } x = 1$$

som därmed är inflexionspunkter; alltså en s.k. "humörsskiftespunkter".

Vi väljer nu bort $x = 0$ som dessutom är stationär punkt och beräknar tangentens

ekvation i $x = 1$.

$$y = f(1) = -1 \text{ och } k = f'(1) = -2$$

Dessa värden sätts in i $y = kx + m$ och man får $m = 1$ så att tangentens ekvation blir

$$y = -2x + 1.$$

3 p

5. Låt

$$f(x) = \begin{cases} kx + m & , \quad x \leq 16 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 16 \end{cases}$$

Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar.

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms i skarven:

$$\lim_{x \rightarrow 16^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 16^+} \sqrt{x} = 4.$$

Därmed vet man att punkten $(16, 4)$ skall ingå som ändpunkt hos den räta linjen $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(16, 4)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt:

$$\begin{aligned} f'_{höger}(16) &= \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{f(x) - f(16)}{x - 16} = \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{x - 16}{(x - 16)(\sqrt{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 16^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

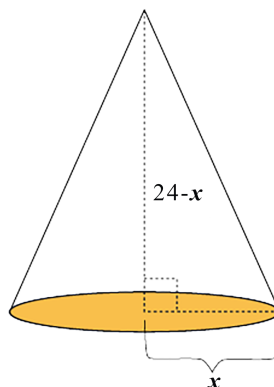
Därmed vet man dessutom att $k = \frac{1}{8}$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 16$. Annars skulle punkten $(16, 4)$ bli en singular punkt (avsaknad av derivata). Insättning av punkten och k -värdet i "räta linjens ekvation" $y = kx + m$ ger sedan att $m = 2$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} + 2 & \text{för } x \leq 16 \\ \sqrt{x} & \text{för } x > 16 \end{cases}$$

3 p

6. Summan av höjden och radien i en rak cirkulär kon är 24 cm. Beräkna konens maximala volym.

Lösningstips:



Genom att välja radie x får man en basyta med arean $B = \pi x^2$

Höjden blir $h = 24 - x$

Så att volymen $V(x) = \frac{Bh}{3} = \frac{\pi x^2(24-x)}{3} = \frac{\pi}{3}(24x^2 - x^3)$, $x \in [0, 24]$

Maximi- och minimivärden för funktioner finner man bland:

- 1) Ändpunkterna – i detta fall får man volymen 0 cm^3 så de saknar intresse.
- 2) Eventuella singulära punkter – i detta fall saknas sådana eftersom att funktionen är deriverbar i alla inre punkter $x \in]0, 24[$
- 3) Stationära punkter som är lokala maximipunkter och dessa fås genom:

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(48x - 3x^2) = \pi x(16 - x) = 0 \text{ då } x = 0 \text{ respektive } x = 16$$

Teckenstudie av derivatan visar att $x = 0$ ger ett lokalt minimum medan $x = 16$ ger ett lokalt maximum. Då detta är det enda x -värdet som kan ge ett maximalt värde hos volymen beräknas nu volymen enligt

$$V(16) = \frac{\pi 16^2(24-16)}{3} = \frac{\pi \cdot 256 \cdot 8}{3} = \frac{\pi \cdot 512 \cdot 4}{3} = \frac{\pi \cdot 1024 \cdot 2}{3} = \frac{2048\pi}{3} \approx 2100 \text{ cm}^3$$

Alltså drygt 2 liter.

7. Visa med stöd av valfri sats att funktionen

$$f(x) = \arccos x - 2 \arctan x$$

har derivatan

$$f'(x) = -\pi$$

i minst en punkt.

Lösningstips: Funktionen har $D_f = [-1, 1]$ och är kontinuerlig på det aktuella intervallet $x \in [-1, 1]$. Dessutom är funktionen deriverbar på intervallet $x \in]-1, 1[$.

För ändpunkterna gäller

$$\begin{aligned} f(-1) &= \pi - 2 \frac{-\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ f(1) &= 0 - 2 \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Alltså motsvaras "lutningen mellan ändpunkterna" av differenskvoten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}}{1 - (-1)} = -\pi$$

Därmed måste det enligt *Medelvärdessatsen för derivator* (sats 4.10) finnas *minst en inre punkt* inom intervallet $x \in]-1, 1[$ sådan att $f'(x) = -\pi$.