Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2014

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Inga			
Skrivtid:	2014-08-30, kl. 14:00–19:00			

1.

Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området

$$D = \left\{(x, y): \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \cos x \leq y \leq 0\right\}$$

a) roterar runt x-axeln

Lösningstips:

$$dV = \pi \underbrace{(0 - \cos x)^2}_{\substack{\text{under} \\ x-\text{axeln}}} dx = \pi \cos^2 x \, dx = \cdots = \pi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left((\pi + 0) - \left(\frac{\pi}{2} + 0\right)\right) = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{(volymenheter)}$$

b) roterar runt y-axeln

Lösningstips:

$$dV = 2\pi x \underbrace{(0 - \cos x)}_{\substack{\text{under} \\ x-\text{axeln}}} dx = -2\pi x \cos x \, dx$$

$$V = -2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x \, dxdx = -2\pi \left([x \sin x]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dxdx \right)$$

$$= -2\pi \left([x \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = -2\pi \left(\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) - (-(-1) - 0) \right)$$

$$= \pi^2 + 2\pi \quad \text{(volymenheter)}$$

(3 p)

2.

Bestäm

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

Lösningstips:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{bmatrix} y = 1 - x^2 \\ \dfrac{dy}{dx} = -2x \\ -dy = 2x \, dx \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$= -2\sqrt{y} + C = -2\sqrt{1 - x^2} + C$$

b) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{x^3} e^{t^2} dt$

Lösningstips:

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{x^3} e^{t^2} dt = [\text{Analysens huvudsats}] = e^{x^6} 3x^2 - e^{\sin^2 x} \cos x$$

c) $\int 2 \sin x \cos x \, e^{\sin^2 x} \, dx$

Lösningstips:

$$\int 2 \sin x \cos x \, e^{\sin^2 x} \, dx = \begin{bmatrix} y = \sin^2 x \\ \dfrac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x \\ 2 \sin x \cos x \, dx = dy \end{bmatrix}$$

$$= \int e^y dy = e^y + C = e^{\sin^2 x} + C$$

(3 p)

3.

Ange samtliga lösningar till differentialekvationen

$$y'' + 3y' = (1 - 2x^2)e^{-x}$$

Lösningstips:

Inledningsvis löser man den homogena ekvationen

$$y'' + 3y' = 0$$

med hjälp av dess karaktäristiska ekvation

$$r^2 + 3r = r(r + 3) = 0$$

som har lösningarna

$$r_1 = 0 \text{ och } r_2 = -3$$

och ger den homogena ekvationens lösning

$$y_h = A + Be^{-3x}$$

Noter att y_h inte på egen hand löser ekvationen i uppgiften (annorlunda högerled) men y_h kompletterar y_p (som strax skall bestämmas) så att dessa båda tillsammans ger den allmänna lösningen.

Ansats väljs exempelvis enligt följande med funktionen $z(x)$ enligt

$$y_p = ze^{-x}$$

med tillhörande derivator

$$y_p' = z'e^{-x} - ze^{-x}$$

$$y_p'' = z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}$$

Insättning ger

$$z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x} + 3z'e^{-x} - 3ze^{-x} = (1 - 2x^2)e^{-x}$$

Med $z = Cx^2 + Dx + E$ och tillhörande derivator får man ett ekvationssystem som ger

$$y_p = (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

Den allmänna lösningen blir

$$y = y_p + y_h = (x^2 + x + 1)e^{-x} + A + Be^{-3x}$$

(3 p)

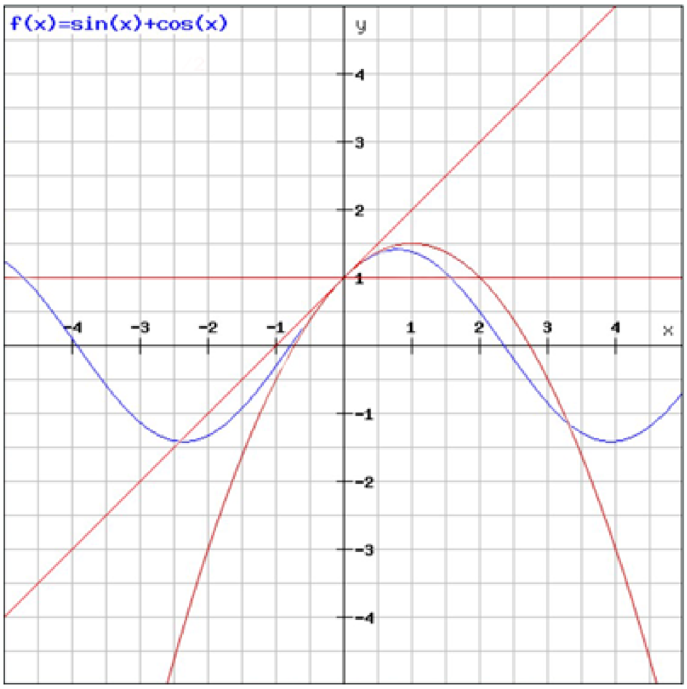
4.

a) Skissa kurvan till $y = f(x) = \sin x + \cos x$ i en omgivning till origo.

Bestäm sedan Maclaurinpolynom av grad 0, 1 och 2 till $f(x)$ och skissa de tre kurvorna i samma koordinatsystem som $f(x)$.

Lösningstips:

Polynomen blir $p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + x$ och $p_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$



b) Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{x^2(e^x - 1)}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling eller lösning med hjälp av standardgränsvärden enligt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{x^2(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\,(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(e^x - 1)(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\,(1 - \cos^2 x)}{x^2(e^x - 1)(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\to 2} = \frac{1}{2}$$

(3 p)

5.

a) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sin^2 x & då\ 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

är en täthetsfunktion för någon stokastisk variabel X.

Lösningstips:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} \underbrace{=1}_{krav}$$

b) Beräkna sannolikheten $P\left(0 \le X \le \frac{\pi}{4}\right)$

Lösningstips:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\ \ dx = \cdots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}$$

c) Bestäm väntevärdet för $f(x)$

Lösningstips:

Eftersom att $f(x)$ är symmetrisk på intervalet $0 \le x \le \pi$ så måste väntevärdet (”tyngdpunkten av arean under grafen”) finnas i just intervallets centrum $x = \frac{\pi}{2}$

(3 p)

6.

Bestäm längden av kurvan $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ då $x \in [1, 2]$.

Lösningstips:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}dx \\ y' = x^2 - \frac{1}{4x^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + x^4 - \frac{2}{4} + \frac{1}{16x^4}}$$

$$= \sqrt{x^4 + \frac{2}{4} + \frac{1}{16x^4}}$$

$$= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2}$$

$$= \left|x^2 + \frac{1}{4x^2}\right|$$

Hela kurvans längd:

$$s = \int_1^2 \left|x^2 + \frac{1}{4x^2}\right| dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{59}{24} \quad (l.e.)$$

7.

En av oändligt många lösningskurvor $y(x)$ till differentialekvationen

$$(x^2 - x)y' = x(y^2 - y)$$

går genom punkten $(2, 3)$.

Bestäm lösningskurvans ekvation och tillhörande intervall.

Lösningstips:

Differentialekvationen

$$(x^2 - x)\frac{dy}{dx} = x(y^2 - y)$$

är separabel och man får

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{1}{x - 1}dx$$

Faktorisering och partialbråksuppdelning ger

$$\left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{x - 1}dx$$

Notera att $x \neq 1, y \neq 0 \; och \; y \neq 1$

Integrering av båda leden ger

$$\ln|y - 1| - \ln|y| = \ln|x - 1| + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y - 1}{y}\right| = \ln|x - 1| + C$$

Insättning av punkten $(2, 3)$ ger $C = \ln\frac{2}{3}$ och man får

$$\ln\left|\frac{y - 1}{y}\right| = \ln|x - 1| + \ln\frac{2}{3}$$

För kurvor med $x > 1$ (och $y > 2$), med hänsyn tagen till punkten $(2, 3)$, gäller förenklat

$$\ln\frac{y - 1}{y} = \ln(x - 1) + \ln\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{y - 1}{y} = \ln\frac{2(x - 1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{y} = \frac{2(x - 1)}{3}$$

y löses ut och man får

$$y = \frac{3}{5 - 2x} \quad , \quad x \in \left]1, \frac{5}{2}\right[$$

(3 p)