Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2015

Examination: TEN 1 inom kurs TNIU23
Max: 21 p   betyg 5: ≥ 16 p   betyg 4: ≥ 12 p   betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0-2 p grundad på KTR1
Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, passare, kurvmall
Skrivtid: 2015-08-29, kl 08:00–13:00

1.

a) Lös differentialekvationen (1 p)

$$2xy' = y^2 + 4 \quad , \quad x > 0$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras och lösningen fås via ledvis integration enligt

$$\frac{1}{4}\int \frac{dy}{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1} = \int \frac{dx}{2x}$$

Till sist löses y ut

$$\text{Svar: } y = 2\tan(\ln x + C)\,, \text{då } \ln x + C \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$$

b) Lös differentialekvationen (1 p)

$$xy' - y = x^2 \tan x \quad , \quad x > 0$$

Lösningstips:

Omskrivning på normalform:

$$y' - \frac{y}{x} = x\tan x \quad , \quad x > 0$$

Differentialekvationen är linjär av första ordningen och löses exempelvis genom multiplikation med en integrerande faktor

$$h(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln[x]} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|}$$

Man erhåller

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \tan x$$

med ett vänsterled som kan skrivas som ”derivatan av en produkt”

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \tan x$$

Ledvis integration och y löses ut

Svar: $y = -x\ln|\cos x| + Cx$, då $x > 0$ och $x \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$

c) Visa att ansatsen $y = Ce^{rx}$ med $C \neq 0$ ger den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + a = 0$$

för differentialekvationen (1 p)

$$y'' + ay = 0$$

Lösningstips:

Insättning av $y = Ce^{rx}$ och $y'' = Cr^2e^{rx}$ ger

$$Cr^2e^{rx} + aCe^{rx} = \underbrace{Ce^{rx}}_{\neq 0}\underbrace{(r^2 + a)}_{=0} = 0$$

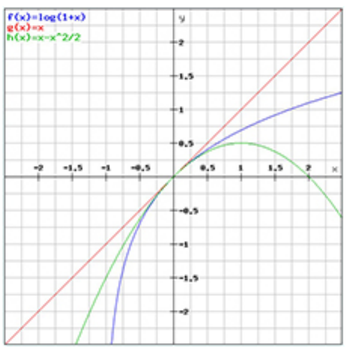
vilket ger den sökta karaktäristiska ekvationen $r^2 + a = 0$

2.

a) I en omgivning till $x = 0$:
Skissa kurvan till $f(x) = \ln(1 + x)$ samt kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av graderna 1 och 2 i ett *gemensamt* koordinatsystem. (1 p)

Lösningstips:

Maclaurinpolynomen tas fram med hjälp av formel. Kurvor till $p_1(x) = x$ och $p_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$ skissas och man ser att $p_2(x)$ något bättre approximerar $f(x)$ än vad $p_1(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$.



b) Bestäm gränsvärdet: (2 p)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sin 3x}{x\cos 2x}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling med Maclaurins formel ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sin 3x}{x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+2x+O(x^2)\right)\left(3x+O(x^3)\right)}{x\left(1+O(x^2)\right)}=\cdots=3$$

3. Låt $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & , \quad x\geq 1\\ 0 & , \quad x<1\end{cases}$

a) Visa att $f(x)$ är en täthetsfunktion. (1 p)

Lösningstips:

$f(x)\geq 0$ för alla värden (icke negativ) och dessutom gäller för integralen över hela definitionsmängden att

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=1$$

Därmed är $f(x)$ en täthetsfunktion.

b) Visa att denna täthetsfunktion saknar väntevärde. (1 p)

Lösningstips:

Definitionen för väntevärde ger integralen som är divergent och därmed visar att väntevärde saknas

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b=\text{divergent}$$

c) Bestäm täthetsfunktionens median. (1 p)

Lösningstips:

Definitionen av median $x_{0.5}=b$ ger i detta fall

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\int_1^b\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=-\frac{1}{b}+1=|\text{krav}|=\frac{1}{2}$$

som visar at $b=x_{0.5}=2$

4.

a) Beräkna *volymen* av den rotationskropp som alstras då området mellan de tre räta linjerna $y = \frac{hx}{r}$, $y = h$ och $x = 0$ (med positiva konstanter r och h) roterar ett varv runt y-axeln. (1,5 p)

Lösningstips:

Ett volymelement av formen liggande skiva med radien $x = \frac{ry}{h}$ och tjockleken dy

$$dV = Bdy = \pi x^2 \, dy = \pi \left(\frac{ry}{h}\right)^2 \, dy$$

Hela volymen, i detta fall en kon, blir därmed

$$V = \int_0^h dV = \pi \int_0^h \left(\frac{ry}{h}\right)^2 dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h y^2 \, dy = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

b) Beräkna *arean* av den rotationsyta som alstras då cirkeln $x^2 + y^2 = 9$ roterar ett varv runt x -axeln. (1,5 p)

Lösningstips:

Ekvationen

$$x^2 + y^2 = 9$$

beskriver en cirkel med radien 3 och centrum i origo. Övre halvan av cirkeln beskrivs av funktionen

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

med derivatan

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

Mantelarena av ett ”cirkelband”

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

$$= 2\pi\sqrt{9 - x^2} \sqrt{\frac{9 - x^2}{9 - x^2} + \frac{x^2}{9 - x^2}} \, dx = 2\pi\sqrt{9 - x^2} \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}} \, dx = 6\pi \, dx$$

Hela klotarean:

$$A = \int_{-3}^{3} dA = 6\pi \int_{-3}^{3} dx = 6\pi[x]_{-3}^{3} = 36\pi \text{ (areaenheter)}$$

5.

Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \sin x$$

som tangerar x-axeln i origo. (3 p)

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

löses med hjälp av tillhörande karaktäristiska ekvation

$$r^2 - 4r + 3r = (r-1)(r-3) = 0$$

vars rötter ger

$$y_h = Ae^x + Be^{3x}$$

Partikulära lösningar fås exempelvis med ansatsen

$$y_p = e^{2x}(C \sin x + D \cos x)$$

$$y_p{}' = 2e^{2x}(C \sin x + D \cos x) + e^{2x}(C \cos x - D \sin x)$$

$$y_p{}'' = 4e^{2x}(C \sin x + D \cos x) + 2e^{2x}(C \cos x - D \sin x)$$

$$+2e^{2x}(C \cos x - D \sin x) + e^{2x}(-C \sin x - D \cos x)$$

Insättning av i ekvationen ger ett ekvationssystem vars lösning är

$$\begin{cases} C = -\dfrac{1}{2} \\ D = 0 \end{cases}$$

så att

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{2x} \sin x$$

Därmed sammanfattar vi

$$y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x} \sin x$$

med

$$y' = y'_h + y'_p = Ae^x + 3Be^{3x} - e^{2x} \sin x - \frac{1}{2}e^{2x} \cos x$$

Villkoret $y(0) = 0$ kräver att $A + B = 0$.

Villkoret $y'(0) = 0$ kräver att $A + 3B - \frac{1}{2} = 0$.

Ekvationssystemet ger $A = -\frac{1}{4}$ och $B = \frac{1}{4}$ så att

$$y = y_h + y_p = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}\sin x$$

6.

Bestäm kurvlängden för $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ då $x \in [0, 2]$. (3 p)

Lösningstips:

Derivering ger $f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

Ett bågelement

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{2x - x^2}}\,dx$$
$$= \sqrt{\frac{2x - x^2 + 1 - 2x + x^2 +}{2x - x^2}}\,dx = \sqrt{\frac{1}{2x - x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}\,dx$$

Hela kurvlängden

$$s = \int_0^2 dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}\,dx = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$$

7.

a) Antag att f är kontinuerlig på I samt att x och $a \in I$.

Bevisa utifrån bl.a. medelvärdessatsen för integraler att (2 p)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Lösningstips:

Beviset av Analysens huvudsats finns under Sats 6.5 på sid 286 i läroboken samt i föreläsningsanteckningarna.

b) Beräkna för $x > 0$ (1 p)

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^t \ln t \, dt$$

Lösningstips:

Generellt gäller

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = |\text{sats } 6.2| = \int_{a}^{\psi(x)} f(t)dt - \int_{a}^{\varphi(x)} f(t)dt = \left|\begin{matrix}\text{insättnings} - \\ \text{formeln}\end{matrix}\right|$$

$$= \Big(F\big(\psi(x)\big) - F(a)\Big) - \Big(F\big(\varphi(x)\big) - F(a)\Big) = F\big(\psi(x)\big) - F\big(\varphi(x)\big)$$

Derivering ger

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\Big(F\big(\psi(x)\big) - F\big(\varphi(x)\big)\Big)$$

$$= |\text{kedjeregeln}| = f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) - f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

Med $f(t) = e^{\sqrt{t}}, \psi(x) = x^2$ och $\varphi(x) = \sqrt{x}$ erhåller man

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^t \ln t \, dt = f(x^2)2x - f\big(\sqrt{x}\big)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(4xe^{x^2} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}\right)\ln x$$