Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2017

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2017-08-26, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 3y' = 6x - 8$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 11$. (3 p)

Lösningstips:

Den homogena ekvationen $y'' - 3y' = 0$ löses och man får $y_h = A + Be^{3x}$.
Ansatsen $y_p' = Cx + D$ med tillhörande derivata $y_p'' = C$ ger efter insättning i ekvationen

$$y_p' = 2 - 2x$$

Partikulärlösningen

$$y_p = 2x - x^2$$

duger tack vare att konstanten A redan finns i y_h.

Den allmänna lösningen blir därmed $y = A + Be^{3x} + 2x - x^2$ med tillhörande derivata $y' = 3Be^{3x} + 2 - 2x$

Med hänsyn till villkoren får man $\begin{cases} A + B = 5 \\ 3B + 2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = 2 \end{cases}$

och lösningen utifrån villkoren blir

$y = 2 + 3e^{3x} + 2x - x^2$

2.

a) Lös differentialekvationen

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{x} \quad , \quad x > 0$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är linjär av första ordningen och löses exempelvis genom multiplikation med den integrerande faktorn x. Man erhåller då

$$xy' + y = \cos x$$

med ett vänsterled som kan skrivas som "derivatan av en produkt" enligt

$$\frac{d}{dx}(xy) = \cos x$$

Ledvis integration och y löses ut

Svar: $y = \frac{\sin x + C}{x} \quad x > 0$

b) Bestäm den lösningen till differentialekvationen

$$(1 + x^2)yy' = x^2 \ , \quad x \geq 0$$

som uppfyller villkoret $y(0) = 2$

(3 p)

Lösningstips:

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras enligt

$$y\,dy = \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$$

Polynomdivision ger

$$y\,dy = \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)\,dx$$

Ledvis integration ger

$$\frac{y^2}{2} = x - \arctan x + C$$

Till sist löses y ut

$$y = \sqrt{2x - 2\arctan x + D}$$

och konstanten anpassas till villkoret

Svar: $y = \sqrt{2x - 2\arctan x + 4}$

3.

a) Visa att täthetsfunktionen

$$y = \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 & , \quad x \in [2, 4] \\ 0 & , \quad \text{övriga } x \end{cases}$$

har olika väntevärde och median.

Lösningstips:

Den sökta integrationsgränsen b i den bestämda integralen

$$\int_2^b \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx = \frac{1}{2}$$

ger medianen $x_{0.5} = b = 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$

Integralen

$$\int_2^4 x\left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$$

ger väntevärdet $\mu = \frac{10}{3} \approx 3.33$, alltså olika median och väntevärde

b) Bestäm $P(X < 3)$

Integralen $\int_2^3 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$ ger sannolikheten 0.25

(3 p)

4. Beräkna

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

Lösningstips:

Partialbråksuppdelning enligt exempelvis

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

ger efter förlängning till lika nämnare

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(x^2+1)}$$

ett smidigt ”ekvationssystem” med lösningen

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

och den förenklade generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

Generaliseringen hävs genom gränsvärdesstudie och standardprimitiver ger sedan värdet

$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x} - arctan\, x\right]_1^b = \cdots = 1 - \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Lösningstips:

Generaliseringen hävs genom gränsvärdesstudie. ”Kedjeregeln baklänges” alternativt substitutionen med $y = \arccos x$ och $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ger lösningen

$$\lim_{b\to 1^-} \left[-\frac{1}{2}(arccos\, x)^2\right]_0^b = \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(3 p)

5.

Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då området innanför

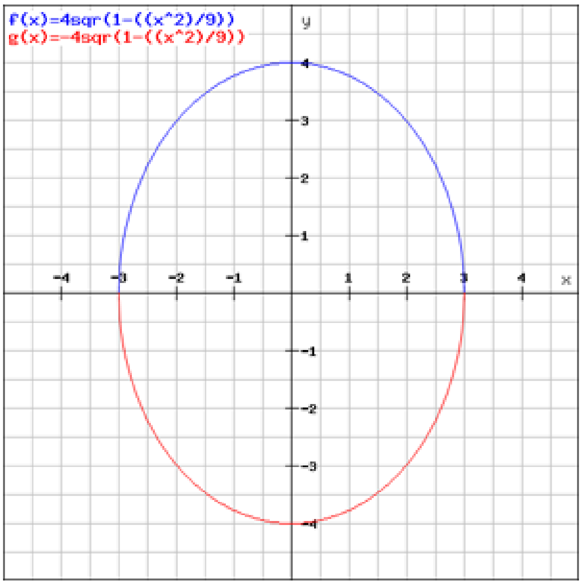
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

roterar runt x-axeln.

Lösningstips:

Man löser ut y ur ellipsens ekvation och får de två funktionerna

$$y = \pm 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$



som har skärningspunkter med x-axeln i $x = -3$ och $x = 3$.

Den övre funktionen väljs att rotera runt x-axeln, skivformeln ger då volymelementet

$$dV = \pi y^2 dx = 16\pi\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)dx$$

Hela volymen blir

$$V = 16\pi\int_{-3}^{3}\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)dx = 16\pi\left[x - \frac{x^3}{27}\right]_{-3}^{3} = 64\pi$$

(3 p)

6.

Bestäm längden av kurvan $y = \sqrt{1-x^2}$ då $x \in [-1, 1]$.

(3 p)

Lösningstips:

Då kurvan faktiskt beskriver den övre halvan av enhetscirkeln (!) bör svaret bli π längdenheter. Detta kan exempelvis visas enligt:

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx \\ y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hela kurvans längd:

$$s = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_{-1}^{1} = \pi \quad \text{(längdenheter)}$$

7.

Bestäm den enda lösningskurvan $y(x)$ som uppfyller

$$y(x) + \int_0^x y(t)dt = 2\sin x$$

(3 p)

Lösningstips:

Ledvis derivering – integralen med hjälp av Analysens huvudsats – ger den linjära differentialekvationen

$$y'(x) + \underbrace{\frac{d}{dx}\int_0^x y(t)dt}_{\substack{\text{fås med Analysens} \\ \text{Huvudstats}}} = 2\cos x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) + y(x) = 2\cos x$$

Ekvationen löses genom att man bestämmer y_h och y_p eller löser ekvationen med hjälp av integrerande faktor följt av partiell integration (den ursprungliga integralen uppkommer i högerledet) och man får allmänna lösningen

$$y = Ce^{-x} + \sin x + \cos x$$

$$y' = -Ce^{-x} + \cos x - \sin x$$

Insättning av $x = 0$ i den ursprungliga ekvationen (alla x -värden skall fungera och $x = 0$ ger enklast beräkning) nollställer integralen och man får ett begynnelsevillkor

$$y(x) + \int_0^0 y(t)dt = 2\sin 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(0) = 0$$

Med hjälp av detta fastställer man $C = -1$ och enda lösningskurvan blir

$$y = -e^{-x} + \sin x + \cos x$$