Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen för kursen VT2018

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Skrivtid:	2018-03-12, kl. 08:00–13:00			

1.

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^x + 10\sin x - 20\cos x$$

Lösningstips:

Den homogena ekvationen löses och med ansatsen $y = Ae^{rx}$ (och de tillhörande derivatorna) får man den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 5r + 6 = 0$ som ger följande ”komplettering” till differentialekvationens partikulärlösning:

$$y_h = A_1e^{2x} + A_2e^{3x}$$

Ansatsen $y = Be^x + C\sin x + D\cos x$ med tillhörande derivator fungerar därmed för att finna partikulärlösningen som efter insättning ger ett ekvationssystem med följande partikulärlösning:

$$y_p = 3\sin x - \cos x + 2e^x$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = 3\sin x - \cos x + 2e^x + A_1e^{2x} + A_2e^{3x}$$

(3 p)

2.

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen med hjälp av integrerande faktor

$$y' = y - 2$$

Lösningstips:

Den integrerande faktorn e^x ger ekvationen

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = -2e^{-x}$$

som kan skrivas som en produktderivata i vänsterledet

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x}) = -2e^{-x}$$

vars primitiva funktioner ger den allmänna lösningen

$$y = 2 + Ce^x$$

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen genom att separera variablerna

$$y' = y - 2$$

Lösningstips:

Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = y - 2$$

separeras enligt

$$\frac{dy}{y - 2} = dx$$

vars primitiva funktioner ger

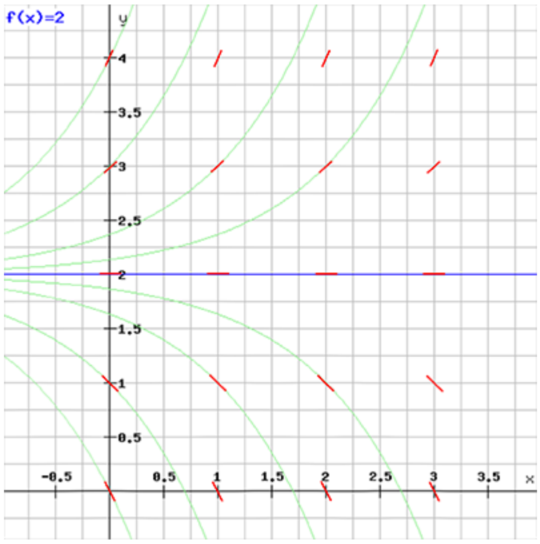
$$\ln|y - 2| = x + C$$

som efter omskrivning ger den allmänna lösningen

$$y = 2 + De^x$$

c) Skissa tillhörande riktningsfält för $0 \leq x \leq 3$ och $0 \leq y \leq 4$. Markera särskilt den lösningskurva som passerar punkten $(1, 2)$.

Svar:



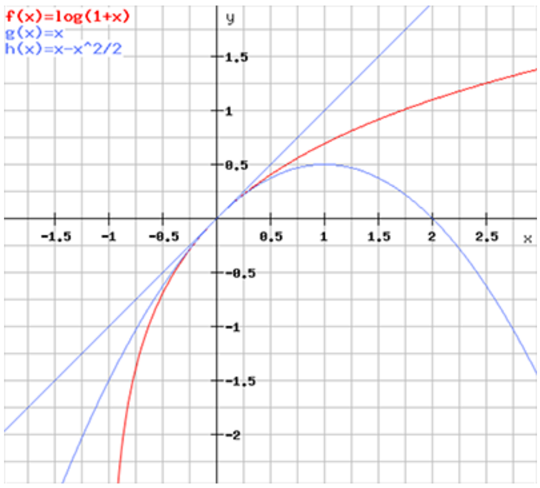
(3 p)

3.

a) Tag fram Maclaurin-polynom av grad 1 och 2 till funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$ och skissa sedan kurvan till $f(x)$ och kurvorna till de båda Maclaurin-polynomen i ett gemensamt koordinatsystem i en omgivning till $x = 0$:

Lösningstips:

Maclaurins formel ger $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$ som skissas:



b) Bestäm gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{\sin x^3 \ln(x+1)}$$

Lösningstips:

Maclaurins formel ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{\sin x^3 \ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\frac{x^4}{2}+\mathcal{O}(x^8)\right)}{\left(x^3+\mathcal{O}(x^9)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)\right)} = \cdots = \frac{1}{2}$$

(3 p)

4. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ \frac{4}{5}e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Beräkna den övre kvartilen.

Lösningstips:

Eftersom att

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{3}{5}e^{3x}dx = \cdots = \frac{1}{5}$$

återstår $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{11}{20}$ och därmed kommer högergränsen $x_{0.75} = b$ i följande integral att ge den sökta övre kvartilen:

$$\int_{0}^{b} \frac{4}{5}e^{-x}dx = \frac{11}{20} \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}-\frac{4}{5}e^{-3b} = \frac{11}{20}$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \quad b = \ln\frac{16}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_{0.75} = 1n\,16 - \ln 5 \approx 1.2$$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

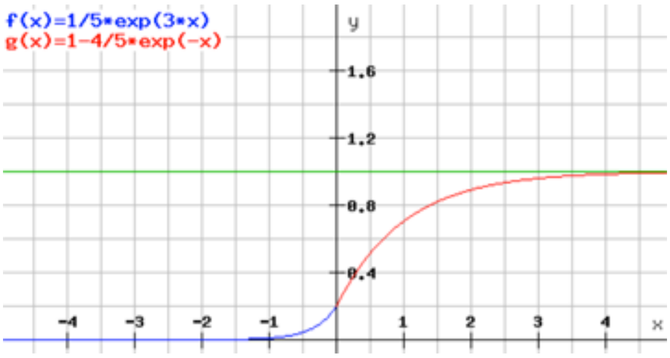
Lösningstips:

Primitiva funktioner med anpassade konstanter ger

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ 1-\frac{4}{5}e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

c) Skissa fördelningsfunktionens kurva – en enkel skiss där eventuella skärningar med axlar och asymptoter syns tydligt.

Svar:



(3 p)

5.

a) Visa med hjälp av en rotationskropp att en rak cirkulär kon med höjden h och radien r har volymen $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Lösningstips:

Den räta linjen $y = \frac{rx}{h}$ roteras runt x-axeln:

$$dV = \pi \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$$

$$V = \int_0^h dV = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

b) Visa med hjälp av en rotationskropp att ett klot med radien r har arean $A = 4\pi r^2$

Lösningstips:

Cirkelns ekvation $r^2 = x^2 + y^2$ ger den övre funktionskurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ som roteras runt x-axeln:

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \cdots = 2\pi \int_{-r}^{r} r dx = \cdots$$

$$= 4\pi r^2$$

(3 p)

6. Beräkna integralen med hjälp av Riemann-summa med n st delintervall:

$$\int_2^4 3x^2 dx$$

Ledning:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lösningstips

Integralen kan exempelvis delas upp och skrivas som en differens mellan två integraler, så att två enkla Riemann-summor kan skapas, båda från $x = 0$:

$$\int_2^4 3x^2 dx = \int_0^4 3x^2 dx - \int_0^2 3x^2 dx = \left|\begin{matrix}\text{Översummor}\\ \text{skapas}\end{matrix}\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 3\left(\frac{4i}{n}\right)^2 \frac{4}{n} - \sum_{i=1}^{n} 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{192}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{24}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{168}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{168}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{168}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = 28\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to 56 \text{ då } n \to \infty$$

(3 p)

7. Ange den enda funktionen $y(x)$ som uppfyller

$$y(x) = 3 + \int_1^x \big(y(t)\big)^2 dt$$

Lösningstips

Eftersom att endast en funktion – alltså en kurva i riktningsfältet – är sökt, måste differentialekvationen ha ett (dolt) villkor som måste uppfyllas. Villkoret bestäms genom att låta $x = 1$ så att integralen nollställs:

$$y(1) = 3 + \int_1^1 \big(y(t)\big)^2 dt = 3 + 0 = 3$$

Alltså måste $y(x)$ passera punkten $(1, 3)$.

Ledvis derivering av den ursprungliga ekvationen och Analysens Huvudsats ger differentialekvationen

$$y'(x) = \big(y(x)\big)^2$$

Förenklat

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

Variablerna separeras

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

Ledvis integration ger

$$-\frac{1}{y} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = D - x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{D - x}$$

Kurvan genom punkten $(1, 3)$ kräver att $D = \frac{4}{3}$ och man får

$$y = \frac{1}{\frac{4}{3} - x} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{4 - 3x}$$

Eftersom att funktionen har en tvådelad kurva med $x \neq \frac{4}{3}$ blir svaret

$$y = \frac{3}{4 - 3x}\ , \quad x < \frac{4}{3}$$

(3 p)