

# Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

---

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningssanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningssanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

## Tentamen inom Envariabelanalys II

*Ordinarie tentamen för kursen VT2018*

Examination: TEN 1 inom kurs TNIU23

Max: 21 p                      betyg 5:  $\geq 16$  p                      betyg 4:  $\geq 12$  p                      betyg 3:  $\geq 8$  p

Bonus: 0-2 p grundad på KTR1

Lösningar: Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.

Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare

Skrivtid: 2018-03-12, kl. 08:00–13:00

---

1.

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^x + 10 \sin x - 20 \cos x$$

*Lösningstips:*

Den homogena ekvationen löses och med ansatsen  $y = Ae^{rx}$  (och de tillhörande derivatorna) får man den karakteristiska ekvationen  $r^2 - 5r + 6 = 0$  som ger följande "komplettering" till differentialekvationens partikulärlösning:

$$y_h = A_1 e^{2x} + A_2 e^{3x}$$

Ansatsen  $y = Be^x + C \sin x + D \cos x$  med tillhörande derivator fungerar därmed för att finna partikulärlösningen som efter insättning ger ett ekvationssystem med följande partikulärlösning:

$$y_p = 3 \sin x - \cos x + 2e^x$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = 3 \sin x - \cos x + 2e^x + A_1 e^{2x} + A_2 e^{3x}$$

(3 p)

2.

- a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen med hjälp av integrerande faktor

$$y' = y - 2$$

*Lösningstips:*

Den integrerande faktorn  $e^{-x}$  ger ekvationen

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = -2e^{-x}$$

som kan skrivas som en produktderivata i vänsterledet

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x}) = -2e^{-x}$$

vars primitiva funktioner ger den allmänna lösningen

$$y = 2 + Ce^x$$

- b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen genom att separera variablerna

$$y' = y - 2$$

*Lösningstips:*

Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = y - 2$$

separeras enligt

$$\frac{dy}{y-2} = dx$$

vars primitiva funktioner ger

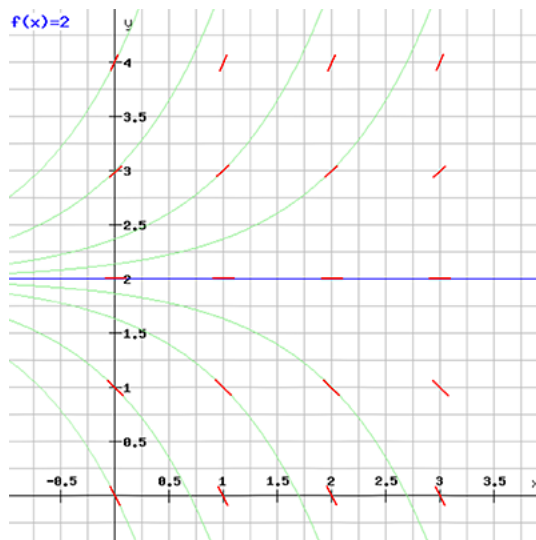
$$\ln|y-2| = x + C$$

som efter omskrivning ger den allmänna lösningen

$$y = 2 + De^x$$

- c) Skissa tillhörande riktningsfält för  $0 \leq x \leq 3$  och  $0 \leq y \leq 4$ . Markera särskilt den lösningskurva som passerar punkten  $(1, 2)$ .

*Svar:*



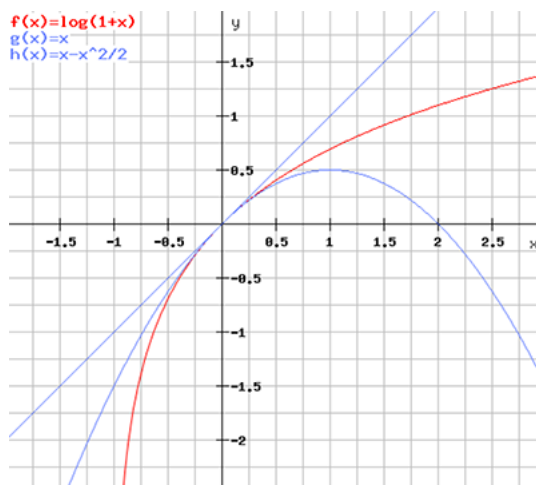
(3 p)

3.

- a) Tag fram Maclaurin-polynom av grad 1 och 2 till funktionen  $f(x) = \ln(1+x)$  och skissa sedan kurvan till  $f(x)$  och kurvorna till de båda Maclaurin-polynomen i ett gemensamt koordinatsystem i en omgivning till  $x = 0$ :

*Lösningstips:*

Maclaurins formel ger  $f_1(x) = x$  och  $f_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$  som skissas:



b) Bestäm gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{\sin x^3 \ln(x+1)}$$

*Lösningstips:*

Maclaurins formel ger

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{\sin x^3 \ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^8)\right)}{(x^3 + \mathcal{O}(x^9)) \left(x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)} = \dots = \frac{1}{2}$$

(3 p)

4. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{5} e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ \frac{4}{5} e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Beräkna den övre kvartilen.

*Lösningstips:*

Eftersom att

$$\int_{-\infty}^0 \frac{3}{5} e^{3x} dx = \dots = \frac{1}{5}$$

återstår  $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$  och därmed kommer högergränsen  $x_{0,75} = b$  i följande integral att ge den sökta övre kvartilen:

$$\int_0^b \frac{4}{5} e^{-x} dx = \frac{11}{20} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{4}{5} - \frac{4}{5} e^{-b} = \frac{11}{20}$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow b = \ln \frac{16}{5} \Leftrightarrow x_{0,75} = \ln 16 - \ln 5 \approx 1.2$$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

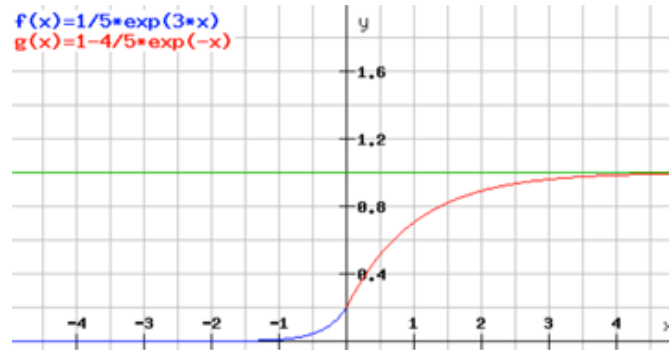
*Lösningstips:*

Primitiva funktioner med anpassade konstanter ger

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{3x} & \text{för } x < 0 \\ 1 - \frac{4}{5} e^{-x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

- c) Skissa fördelningsfunktionens kurva – en enkel skiss där eventuella skärningar med axlar och asymptoter syns tydligt.

*Svar:*



(3 p)

5.

- a) Visa med hjälp av en rotationskropp att en rak cirkulär kon med höjden  $h$  och radien  $r$  har volymen  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

*Lösningstips:*

Den räta linjen  $y = \frac{rx}{h}$  roteras runt  $x$ -axeln:

$$dV = \pi \left( \frac{rx}{h} \right)^2 dx$$

$$V = \int_0^h dV = \pi \int_0^h \left( \frac{rx}{h} \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

- b) Visa med hjälp av en rotationskropp att ett klot med radien  $r$  har arean  $A = 4\pi r^2$

*Lösningstips:*

Cirkelns ekvation  $r^2 = x^2 + y^2$  ger den övre funktionskurvan  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  som roteras runt  $x$ -axeln:

$$A = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left( \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \dots = 2\pi \int_{-r}^r r dx = \dots$$

$$= 4\pi r^2$$

(3 p)

6. Beräkna integralen med hjälp av Riemann-summa med  $n$  st delintervall:

$$\int_2^4 3x^2 dx$$

Ledning:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

*Lösningstips*

Integralen kan exempelvis delas upp och skrivas som en differens mellan två integraler, så att två enkla Riemann-summor kan skapas, båda från  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_2^4 3x^2 dx &= \int_0^4 3x^2 dx - \int_0^2 3x^2 dx = \left| \begin{array}{l} \text{Översummor} \\ \text{skapas} \end{array} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n 3 \left( \frac{4i}{n} \right)^2 \frac{4}{n} - \sum_{i=1}^n 3 \left( \frac{2i}{n} \right)^2 \frac{2}{n} = \frac{192}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{24}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{168}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{168}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{168}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = 28 \left( 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \rightarrow 56 \text{ då } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(3 p)

7. Ange den enda funktionen  $y(x)$  som uppfyller

$$y(x) = 3 + \int_1^x (y(t))^2 dt$$

*Lösningstips*

Eftersom att endast en funktion – alltså en kurva i riktningsfältet – är sökt, måste differentialekvationen ha ett (dolt) villkor som måste uppfyllas. Villkoret bestäms genom att låta  $x = 1$  så att integralen nollställs:

$$y(1) = 3 + \int_1^1 (y(t))^2 dt = 3 + 0 = 3$$

Alltså måste  $y(x)$  passera punkten  $(1, 3)$ .

Ledvis derivering av den ursprungliga ekvationen och Analysens Huvudsats ger differentialekvationen

$$y'(x) = (y(x))^2$$

Förenklat

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

Variablerna separeras

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

Ledvis integration ger

$$-\frac{1}{y} = x + C \Leftrightarrow \frac{1}{y} = D - x \Leftrightarrow y = \frac{1}{D - x}$$

Kurvan genom punkten  $(1, 3)$  kräver att  $D = \frac{4}{3}$  och man får

$$y = \frac{1}{\frac{4}{3} - x} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4 - 3x}$$

Eftersom att funktionen har en tvådelad kurva med  $x \neq \frac{4}{3}$  blir svaret

$$y = \frac{3}{4 - 3x}, \quad x < \frac{4}{3}$$

(3 p)