Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2018

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar, tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2018-09-01, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 2y' = 8 - 9e^{3x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y'(0) = 17$ och $y(0) = 6$. (3 p)

Lösningstips:

Den homogena ekvationen $y'' - 2y' = 0$ löses och man får $y_h = A + Be^{2x}$ vilka inte återfinns i högerledet. Därmed fungerar ansatsen $y_p' = Ce^{3x} + D$ med tillhörande derivata y_p'' och insättning i ekvationen ger $y_p' = -9e^{3x} - 4$. Därmed duger partikulärlösningen $y_p = -3e^{3x} - 4x$ (utan konstant).

Den allmänna lösningen blir därmed $y = A + Be^{2x} - 3e^{3x} - 4x$ och efter derivering $y' = 2Be^{2x} - 9e^{3x} - 4$

Med hänsyn till villkoren får man $\begin{cases} 2B - 9 - 4 = 17 \\ A + B - 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -6 \\ B = 15 \end{cases}$

$y = -6 + 15e^{2x} - 3e^{3x} - 4x$

2.

a) Lös differentialekvationen

$$y' = -y^2$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras enligt $-\frac{dy}{y^2} = dx$ för $y \neq 0$ (notera att $y = 0$ studeras för sig) och båda leden integreras. Man får den allmänna lösningen $y = \frac{1}{x+C}$ med $x \neq -C$ samt $y = 0$ som också direkt löser ekvationen

b) Lös differentialekvationen

$$y' + 2xy = 2x$$

Lösningstips:

Ekvationen kan också lösas genom att båda leden multipliceras med den integrerande faktor e^{x^2} och man får lösningen $y = 1 + Ce^{-x^2}$.

c) Visa med lämplig ansats att ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 0$ får en karaktäristisk ekvation $r^2 - 4r + 5 = 0$ och att den leder till den allmänna lösningen

$$y = e^{2x}(A\sin x + B\cos x)$$

Lösningstips:

Insättning av $y = Ce^{rx}$ med tillhörande derivator ger efter faktorisering ekvationen $r^2 - 4r + 5 = 0$ med lösningarna $r = 2 \pm i$. Därmed gäller att $y = Ce^{(2+i)x} + De^{(2-i)x}$ som efter omskrivning med bl.a. Eulers formel ger $y = e^{2x}\big((C + D)\cos x + i(C - D)\sin x\big)$ som förenklas till $y = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

(3 p)

3. Låt $f_X(x)$ vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{6e^{2x}}{7} & x < 0 \\ \dfrac{8e^{-2x}}{7} & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?

Svar: $f_X(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar: $$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3e^{2x}}{7} & x < 0 \\ 1 - \dfrac{4e^{-2x}}{7} & x \geq 0 \end{cases}$$

c) Beräkna medianen.

Svar: $x_{0.5} = \dfrac{\ln 8 - \ln 7}{2}$

(3 p)

4.

a) Bestäm a så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna sedan gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax) - 2x + \arctan(ax)}{x^2}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax) - 2x + \arctan(ax)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} - 2x + ax - \frac{a^3x^3}{3} + O(x^4)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(2a-2)x - \frac{a^2x^2}{2} + O(x^4)}{x^2}$$

Ändligt gränsvärde endast om $a = 1$ vilket ger gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + O(x^2)}{1} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+5} \left(3 + \frac{1}{e^{x^2}}\right) dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+5} \left(3 + \frac{1}{e^{x^2}}\right) dx = \left| \begin{array}{c} \text{Medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler med} \\ a \leq \xi \leq a+5 \end{array} \right| = f(\xi)\big((a+5) - a\big)$$

$$= \left| \begin{array}{c} 3 + e^{-x^2} \to 3 \text{ då } x \to \infty \\ \text{vilket medför att} \\ f(\xi) \to 3 \text{ då } x \to \infty \end{array} \right| = 3 \cdot 5 = 15$$

(3 p)

5. Cirkelns ekvation med centrum i origo är

$$x^2 + y^2 = r^2$$

a) Visa med hjälp av en rotationskropp att klotets volym ges av

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Lösningstips:

Cirkelns ekvation $r^2 = x^2 + y^2$ ger den övre kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ som får rotera runt x-axeln:

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(r^2 - x^2)dx$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r}$$

$$= \cdots = \frac{4\pi r^3}{3}$$

b) Visa med hjälp av en rotationskropp att arean av klotets yta ges av

$$V = 4\pi r^2$$

Lösningstips:

Cirkelns ekvation $r^2 = x^2 + y^2$ ger den övre kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ som får rotera runt x-axeln:

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \cdots = 2\pi \int_{-r}^{r} r dx = \cdots = 4\pi r^2$$

6.

a) Analysen Huvudsats berättar att

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Förklara med en skiss och egna ord vad uttrycket ovan i praktiken berättar.

Lösningstips:

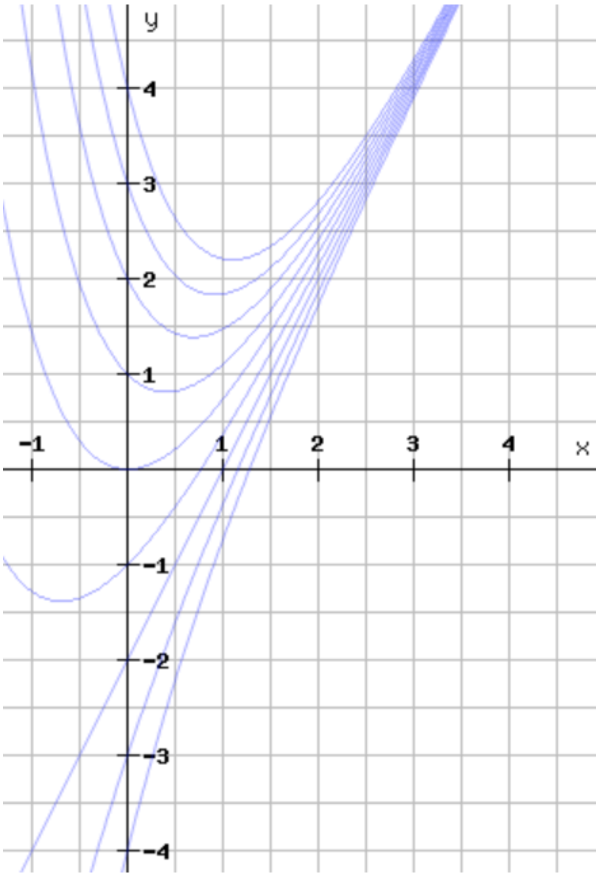
Se kommentarer om Analysens Huvudsats från föreläsning 4. Satsen säger att marginalökningen av integralen $\int_a^x f(t)\, dt$ med avseende på den högra integrationsgränsen x är lika stor som funktionsvärdet $f(x)$.

b) Härled Insättningsformeln (för beräkning av bestämda integraler) ur Analysen Huvudsats.

Se anteckningar från föreläsning 4 då huvudsatsen tillämpades på två intervall $[a, x_1]$ och $[b, x_2]$. Insättningsformeln fick man genom att man integrerar uttrycken och sedan subtrahera dem med varandra.

(3 p)

7. Nedan finns delar av att riktningsfält till en *linjär* differentialekvation av *första ordningen* med *konstanta koefficienter*. Nio av oändligt många lösningskurvor är skissade:



a) Ange utifrån bilden ovan en tänkbar partikulärlösning till ekvationen och motivera ditt svar.

Lösningstips:

Denna typ av ekvationer har alltid lösningar av typen $y = y_p + y_h$ med funktionen y_p som en av oändligt många lösningar av ekvationen och funktionen y_h är en term av typen $y_h = Ce^{rx}$ som löser motsvarande homogena ekvation (med noll i högerledet). Samma konstanter r för alla lösningskurvorna men olika konstanter C.

Som synes finns en rät linje i riktningsfältet och därmed gäller att

$$y = Ax + B + Ce^{rx}$$

Med $C = 0$ fås just denna lösningskurva (den räta linjen) som har ekvationen $y = 2x - 2$. Alltså har ekvationen partikulärlösningen

$$y_p = 2x - 2$$

b) Hitta på en differentialekvation som har en allmän lösning i överensstämmelse med bilden – motivera dit svar med både resonemang och beräkningar utifrån riktningsfältet.

Lösningstips:

Vi vet efter a) att $y = 2x - 2 + Ce^{rx}$

Den stationära punkten $(0, 0)$ för en av lösningskurvorna ger med $x = 0$ och $y = 0$ att $C = 2$ för just denna lösningskurva.

För samma lösningskurva vet vi att $y' = 2 + Cre^{rx}$ med $x = 0, y' = 0$ och $C = 2$ får man $r = -1$ som gäller för alla lösningskurvor.

Därmed får man den allmänna lösningen

$$y = 2x - 2 + Ce^{-x}$$

med tillhörande derivata

$$y' = 2 - Ce^{-x}$$

Alla linjära differentialekvationer av första ordningen med *lika* konstanta koefficienter – alltså med lika antal y' och y i vänsterledet såsom

$$y' + y = 2x$$

har högerled som enbart består av ett förstagradspolynom (alltså ingen exponentialfunktion) vilket önskas.