Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2019

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Skrivtid:	2019-08-31, kl. 08:00–13:00			

---

1. Bestäm den lösningen till differentialekvationen som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 1$:

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x} + 10\cos x$$

(3 p)

Lösningstips:

Den homogena ekvationen $y'' - 3y' + 2y = 0$ löses, t.ex. med ansatsen $y_h = Ce^{rx}$ som leder till en karaktäristiska ekvatione med rötterna $r = 2$ och $r = 1$ som ger den homogena ekvationens lösning

$y_h = Ae^x + Be^{2x}$

Tack vare detta duger ansatsen $y_p = Ce^{3x} + D\sin x + E\cos x$ för att finna *en* lösning på ekvationen. Insättning av y_p med tillhörande $y_p{}'$ och $y_p{}''$ i ekvationen ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2C = 6 \\ D + 3E = 0 \\ -3D + E = 10 \end{cases}$$

som ger lösningen

$$y_p = 3e^{3x} - 3\sin x + \cos x$$

Den allmänna lösningen blir

$$y = 3e^{3x} - 3\sin x + \cos x + Ae^x + Be^{2x}$$

Med tillhörande derivata

$$y' = 9e^{3x} - 3\cos x - \sin x + Ae^{x} + 2Be^{2x}$$

Villkoren ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4 + A + B = 1 \\ 6 + A + 2B = 1 \end{cases}$$

med lösningen

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \end{cases}$$

så att den sökta lösningskurvan i riktningsfältet är

$$y = 3e^{3x} - 3\sin x + \cos x - e^{x} - 2e^{2x}$$

(3 p)

2. Den stokastiska variabeln X anger hur lång tid t det normalt tar tills den första kunden dyker upp – angivet i minuter efter att en affär öppnar. Variabeln beskrivs av *täthetsfunktionen*:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 0 \\ e^{-t} & \text{för } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Beräkna hur stor chansen är att den första kunden dyker upp inom tidsintervallet 1-2 min efter att affären öppnas.

Lösningstips:

Exempelvis integralen $\int_1^2 e^{-t}\,dt = \left[-\frac{1}{e^t}\right]_1^2$ ger svaret

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}2$$

b) Beräkna hur stor chansen är att den första kunden dyker upp efter exakt 2 min.

Lösningstips:

Eftersom den tillhörande integralen har ”bredden” noll i denna frågeställning måste svaret vara just 0.

c) Beräkna det förväntade värdet för X.

Lösningstips:

Enligt definitionen av *förväntat värde* fås svaret med hjälp av den generaliserade integralen $\int_0^\infty e^{-t}\, t\, dt$.

Generaliseringen hävs och integralen löses genom partiell integration.

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} t\, dt = \cdots = 1$$

(3 p)

3.

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' - y = -x$$

Lösningstips:

Den integrerande faktorn e^{-x} ger

$$y'e^{-x} - ye^{-x} = -xe^{-x}$$

med ett vänsterled som är en derivata av en produkt enligt

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x}) = -xe^{-x}$$

Ledvis integration ger

$$ye^{-x} = \int -xe^{-x} dx$$

som efter partiell integration ger

$$ye^{-x} = (x+1)e^{-x} + C$$

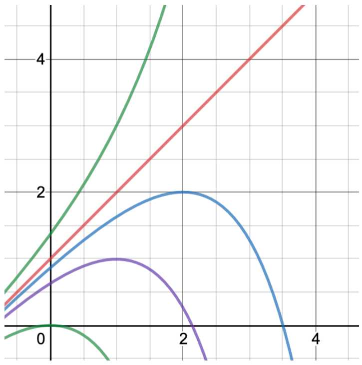
och den allmänna lösningen

$$y = x + 1 + Ce^{x}$$

(som har den räta linjen $y = x + 1$ som *en* av sina lösningskurvor)

b) Skissa tillhörande riktningsfält för $0 \leq x \leq 3$ och $0 \leq y \leq 3$ och markera särskilt den lösningskurva som passerar punkten $(1, 2)$.

Lösningstips:
Värdetabell skapas inom intervallen ovan med hjälp av ekvationen skriven enligt $y' = y - x$. De beräknade derivatorna y' i de valda punkterna gör att kurvor växer fram:



(3 p)

4. Beräkna volymen av kroppen som uppstår då området instängt mellan kurvan $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$, linjerna $x = 1$ och $x = 2$ samt x-axeln roterar ett varv kring x-axeln.

Lösningstips:
En rotationskropp skapas med skivor och partialbråksuppdelning

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \frac{1}{x^2 + 4x} dx = \pi \frac{1}{x(x+4)} dx = |PBU|$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right) dx$$

Integralen ger sedan volymen

$$\frac{\pi}{4}\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right) dx = \cdots = \frac{\pi}{4}(\ln 2 - \ln 6 - \ln 1 + \ln 5)$$

$$= \frac{\pi}{4}(\ln 5 - \ln 3) = \frac{\pi}{4}\ln\frac{5}{3} \approx 0{,}4 \text{ v.e.}$$

(3 p)

5. Beräkna arean av rotationsytan som uppstår då kurvan

$$y = \sqrt{9 - x^2}\ , \qquad -3 \leq x \leq 3$$

roterar ett varv kring y-axeln.

Lösningstips:
Eftersom att kurvan beskriver en halvcirkel (övre halvan av cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 9$) uppstår genom rotation en halv klotyta med radien 3 och centrum i origo. Därmed blir arean med hjälp av känd formel.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 18\pi\ a.e.$$

Om man istället beräknar arean med hjälp av en rotationskropp använder man metoden med remsor som har arena dA enligt

$$dA = 2\pi y\ ds = 2\pi x\sqrt{1 + (y')^2}\ dx$$

Med derivatan $y' = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$ får man genom förenkling

$$dA = 2\pi x\sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}}\ dx = \cdots = 6\pi x \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx$$

som integreras inom aktuellt intervall för rotation runt y-axeln och man får svaret

$$6\pi \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx = -3\pi \int_0^3 \frac{-2x}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx = \left| \begin{array}{l} u = 9 - x^2 \\ \dfrac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x\ dx \end{array} \right|$$

$$= -3\pi \int_9^0 \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = 3\pi \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{u}}\ du = 3\pi\left[2\sqrt{u}\right]_0^9 = 18\pi\ a.e.$$

(3 p)

6.

a) Härled *analysens huvudsats* med hjälp av en tydlig skiss, *derivatans definition* och *medelvärdessatsen för integraler*.

Lösningstips:
Se härledning av analysens huvudsats från föreläsning 4 samt i läroboken.

b) Härled *insättningsformeln* med hjälp av *analysens huvudsats.*

Lösningstips:
Se härledning av Insättningsformeln från föreläsning 4 eller i läroboken. Analysens Huvudsats tillämpades på två intervall, exempelvis $[a, x_1]$ och $[a, x_2]$. Insättningsformeln får man genom att man integrerar uttrycken och sedan subtrahera dem med varandra.

(3 p)

7.

a) Ställ upp en Riemann-summa med n st delintervall för beräkning av integralen

$$\int_0^1 e^x dx$$

Lösningstips:
Riemann-summa tecknas med remsor som har bredden $\frac{1}{n}$ och positionerna

$$x_i = \frac{i}{n}$$

En översumma tecknas inom aktuellt intervall för $f(x_i) = e^{x_i}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots e^{\frac{n}{n}}\right)$$

b) Beräkna den erhållna Riemann-summan för $n \to \infty$.

Lösningstips:

Vi har översumman

$$S = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots e^{\frac{n}{n}}\right)$$

som multipliceras med $e^{\frac{1}{n}}$ så att man får

$$Se^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} + e^{\frac{n+1}{n}}\right)$$

De båda uttrycken har extremt många lika termer som kan fås bort genom att man subtraherar uttrycken med varandra:

$$Se^{\frac{1}{n}} - S = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots e^{\frac{n}{n}}\right) - \frac{1}{n}\left(e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}} + e^{\frac{n+1}{n}}\right)$$

Efter utbrytning av S i vänsterledet och förenkling genom strykning av termer i högerledet får man en betydligt enklare ekvation:

$$S\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)$$

Den sökta Riemann-summan S löses nu ut genom division med $e^{\frac{1}{n}} - 1$ och man får:

$$S = \frac{\frac{1}{n}\left(e^{\frac{n+1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\frac{1}{n}\left(e^{1+\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Division med $\frac{1}{n}$ i både täljare och nämnare gör att man kan utnyttja standardgränsvärde i nämnaren när man sedan låter $n \to \infty$:

$$S = \frac{\dfrac{\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}(e-1)}{\frac{1}{n}}}{\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}}$$

Nu låter man $n \to \infty$ vilket gör att $\frac{1}{n} \to 0$ och att $e^{\frac{1}{n}} \to 1$ vilket ger

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{e^{\frac{1}{n}}}^{\to 1}(e-1)}{\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}_{\substack{sgv \\ \to 1}}} = e - 1 \approx 1{,}7$$

(3 p)