Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie hemtentamen för kurs given VT2020

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU23	
Max:	21 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1 skriven under aktuell läsperiod	
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.	
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare	
Skrivtid:	2020-03-18, kl. 14:00–19:00	
Inlämning:	Senast kl. 19:10 via LISAM, i kursrum för TNIU23 2020	

1. Lös differentialekvationen och ange vilka av lösningskurvorna som konvergerar mot $y = 0$ då $x \to \infty$

$$y'' + 2y' - 3y = 6e^{-2x}$$

(3 p)

Lösningstips:
Ekvationen löses genom $y = y_h + y_p$. Ansats $y_h = Ce^{rx}$ ger karaktäristisk ekvation $r^2 + 2r - 3 = 0$ som leder till $y_h = Ce^{-3x} + De^{x}$. Ansats $y_p = Ae^{-2x}$ ger $y_p = -2e^{-2x}$
Man får den allmänna lösningen $y = Ce^{-3x} + De^{x} - 2e^{-2x}$ varav enbart lösningskurvorna $y = Ce^{-3x} - 2e^{-2x}$ konvergerar då $x \to \infty$.

2. Bestäm den polynomfunktion

$$p(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

som så bra som möjligt approximerar funktionen $f(x) = \ln(1 + 2x)$ i en omgivning till origo.

(2 p)

Lösningstips:
Insättning av $x = 0$ ger $A = 0$. Därefter upprepad ”derivering och insättning av $x = 0$” (tre varv) ger därefter $B = 2$, sedan $C = -2$ och till sist $D = \frac{8}{3}$ så att $p(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$.

3. En kontinuerlig stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} & , \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad \text{övriga } x \end{cases}$$

a) Visa att $f_X(x)$ uppfyller kraven för att vara en täthetsfunktion – två egenskaper berörs.

Lösningstips:
Visa att $f_X(x) \ge 0$ för alla x (vilket visas genom att man löser olikheten $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ och tolkar resultatet korrekt) samt att integralen över hela definitionsmängden har värdet 1.

b) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion med tillhörande definitionsmängd.

Lösningstips:
Primitiv funktion och anpassning av konstant enligt

definition för fördelningsfunktion ger

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<-1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4} & , \quad -1\le x\le 1\\ 1 & , \quad x>1\end{cases}.$$

c) Förklara hur det kommer sig att medianen och väntevärdet hos vissa täthetsfunktioner antar lika värde, medan de hos täthetsfunktion i denna uppgift antar *olika* värden.

Exempel på godkänd förklaring:
Hos en symmetrisk fördelning sammanfaller alltid det mellersta värdet (= median) och tyngdpunkten (väntevärdet).
Hos en asymmetrisk fördelning förskjuts tyngdpunkten – från det mellersta värdet – till en punkt som ligger på den sida där fördelningen är mest utdragen.
Jämför gärna med vridmoment och tyngdpunkt inom mekanik!

(3 p)

4. Välj en valfri rät linje av typen $y=kx+m$, så att ett *begränsat* område uppstår mellan den räta linjen, x-axeln och y-axeln. Låt detta område rotera runt en valfri axel, så att en kon skapas.

a) Beräkna volymen av den erhållna konen med hjälp av en integral.

Lösningstips:
Notera att $k\neq 0$ och $m\neq 0$ för att ett begränsat område enligt texten skall uppstå.
Varje student har sin egen lösning och med exempelvis rotationsvolym runt x-axeln och den räta linjen $y=-3x+6$ som skär axlarna i $(2,0)$ respektive $(0,6)$ får man $\pi\int_0^2(-3x+6)^2\,dx=\cdots=24\pi$ volymenheter.

b) Beräkna mantelarean av den erhållna konen med hjälp av en integral.

Lösningstips:
Varje student har sin egen lösning och med exempelvis rotationsyta runt y-axeln och den räta linjen $y=-3x+6$ som skär axlarna i $(2,0)$ respektive $(0,6)$ får man $\int_0^2 2\pi x\sqrt{1+3^2}\,dx=\cdots=4\pi\sqrt{10}$ areaenheter.

(4 p)

5.

a) Förklara med egna ord vad det är som sker under en beräkning med nedanstående mellanled. Hur såg uppgiften ut från början och vad är det man försöker bestämma och med vilken taktik?

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = h(x)e^{F(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{F(x)}y\right)' = h(x)e^{F(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{F(x)}y = \int h(x)e^{F(x)}dx$$

$$\vdots$$

Exempel på godkänd förklaring:
Den ursprungliga ekvationen – före förlängning med faktorn $e^{F(x)}$ – var den linjära differentialekvationen av första ordningen $y' + f(x)y = h(x)$. Faktorn $e^{F(x)}$ kallas integrerande faktor och är smart anpassad så att man efter multiplikation med faktorn (se rad två) får en ekvation med ett vänsterled som är *derivata av en produkt*. På så får man plötsligt den sökta funktionen y på *enbart en plats* i ekvationen, vilket underlättar en hel del. Integration i av båda ut leden (se rad tre) gör sedan att man nu kan lösa den sökta funktionen y och man får till sist den allmänna lösningen av y.

b) Lös differentialekvationen

$$y' = xy$$

med hjälp av en valfri metod.

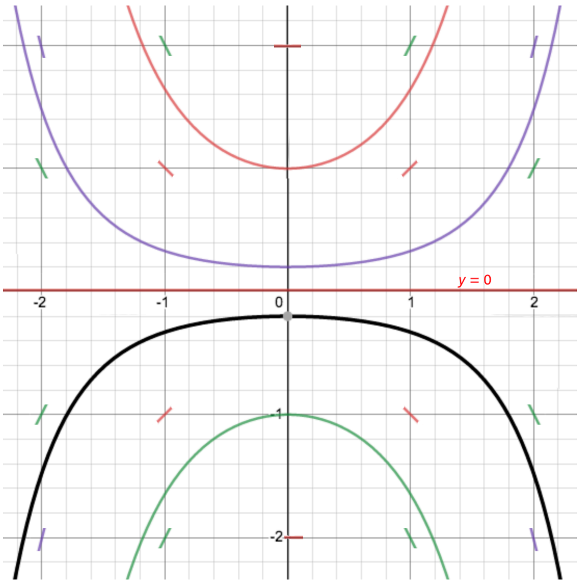
Lösningstips:
Separation av variablerna eller lösning med hjälp av integrerande faktor $e^{\frac{x^2}{2}}$ ger båda den allmänna lösningen $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

c) Lös samma differentialekvation med hjälp av en *annan* metod.

Lösningstips:
Se ovan…

d) Skapa en värdetabell för beräkning av y' inom intervallen $-2 \leq x \leq 2$ och $-2 \leq y \leq 2$. Skissa sedan tillhörande riktningsfält och markera särskilt den partikulärlösningen genom passerar punkten $(1, 0)$.

Lösningstips:
Värdetabell med 25 punkter ger följande skiss med bl.a. $y_p = 0$ som passerar punkten $(1, 0)$.



(4 p)

6. Hitta på en valfri diskontinuerlig funktion enligt

$$f(x) = \begin{cases} \ldots ? \ldots & , \quad x \geq 0 \\ \ldots ? \ldots & , \quad x < 0 \end{cases}$$

och visa med ett räkneexempel att Medelvärdessatsen för integraler inte gäller för diskontinuerliga funktioner såsom denna.

(2 p)

Exempel på godkänd förklaring:
Med exempelvis funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 6 & , \quad x \geq 0 \\ 2 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

får man inom intervaller $x \in [-1, 1]$ en integral

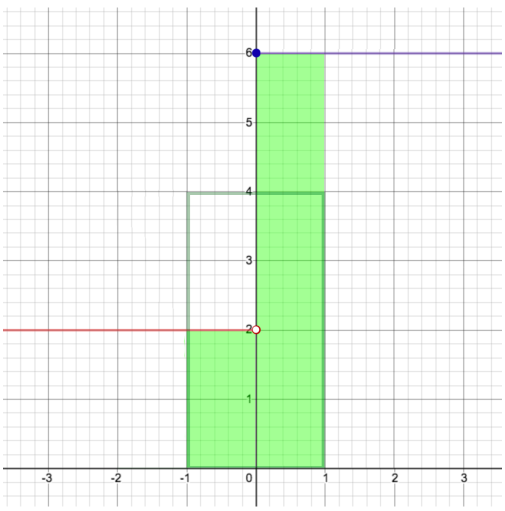
$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} 2\, dx + \int_{0}^{1} 6\, dx = \lim_{b \to 0^-} \int_{-1}^{b} 2\, dx + \int_{0}^{1} 6\, dx \ldots = 8$$

Med medelvärdessatsen får man på samma intervall

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = f(\xi)\big(1 - (-1)\big) = 2f(\xi) = 8$$

vilket kräver att höjden hos rektangeln med samma area måste vara $f(\xi) = 4$.

Problemet är att detta funktionsvärde saknas hos den aktuella funktionen! Det finns alltså inget $x = \xi$ (inom aktuellt intervall) som ger det passande $f(\xi) = 4$. Därmed gäller inte medelvärdessatsen för integraler för denna funktion. Detta problem kan enbart uppkomma om funktionen är diskontinuerlig på det aktuella intervallet.



7. Bestäm *den enda* funktionen $y(x)$ som uppfyller ekvationen

$$y(x) - \int_2^x \left(y(t)\right)^2 dt = 1$$

Lösningstips

Eftersom att endast en funktion – alltså en lösningskurva i riktningsfältet – är sökt, måste differentialekvationen ha ett (dolt) villkor som måste uppfyllas. Villkoret bestäms genom att låta $x = 1$ så att integralen nollställs:

$$y(2) - \int_2^2 \left(y(t)\right)^2 dt = y(2) - 0 = 1$$

Alltså måste $y(x)$ passera punkten $(2, 1)$.
Ledvis derivering av den ursprungliga ekvationen och Analysens Huvudsats ger nu differentialekvationen

$$y'(x) - \left(y(x)\right)^2 = 0$$

förenklat skriven

$$\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

Variablerna separeras

$$\frac{dy}{y^2} = 1\,dx$$

och ledvis integration ger

$$-\frac{1}{y} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = D - x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{D - x}$$

Kurvan genom punkten $(2, 1)$ kräver att $D = 3$ och man får

$$y = \frac{1}{3 - x}$$

Eftersom att funktionen har en tvådelad kurva med $x \neq 3$ och kurvan passera $x = 2$ måste den sökta lösningskurvan ligga till vänster om $x = 3$ enligt

$$y = \frac{3}{3 - x} \;, \quad x < 3$$

(3 p)