Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen version a för kurs given VT2021

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU23
Max:	21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1 skriven tidigast 1 år före aktuellt datum
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare
Skrivtid:	2021-03-20, kl. 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1) Låt

$$y'' + 4y' = 8x + 14$$

a) Lös differentialekvationen

Svar: $y = x^2 + 3x + C + De^{-4x}$

b) Förklara skillnaden i betydelse av y_h och y_p.

Ledning: En partikulärlösning y_p är en lösningskurva till differentialekvationen medan y_h inte är det och istället berättar hur lösningskurvorna y_p tillåts variera för att fortfarande fungera som lösningskurvor.

(3 p)

2) Låt

$$y' = \frac{y}{x} \quad \text{för } x > 0$$

a) Lös differentialekvationen på ett valfritt sätt.

b) Lös differentialekvationen på ett annat sätt.

Ledning: Lösningar med integrerande faktor respektive variabelseparation ger båda lösningskurvorna $y = kx$ som alla är räta linjer genom origo.

c) Skissa tillhörande riktningsfält.

Ledning: Skissa räta linjer genom origo.

(3 p)

3) Gränsvärden

a. Anpassa a så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1+ax+\sin 2x}{x-\arctan x}$$

Ledning: om ett ändligt gränsvärde skall finnas får täljaren i denna uppgift inte ha lägre grad utan lika grad eller högre grad än nämnaren. Med Maclaurinutveckling och förenkling får man

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^3)-1+ax+\left(2x-\frac{8x^3}{6}\right)+\mathcal{O}(x^5)}{x-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)+\mathcal{O}(x^5)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(a+2)}^{\substack{\text{nollställs}\\ \text{för ändligt}\\ \text{gränsvärde}}}\,x-\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^5)}=\left|\begin{matrix}\text{Om man}\\ \text{sätter}\\ a=-2\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+\mathcal{O}(x^3)}{\frac{1}{3}+\mathcal{O}(x^3)}=-1$$

b. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+4}\left(\frac{1}{x}+\arctan x\right)dx$$

Ledning: Resonemang enligt medelvärdessatsen för integraler med valt ξ enligt $a\le\xi\le a+2$ får man gränsvärdet 2π.

(3 p)

4) Låt

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & ,\quad 0\le x<1\\ \frac{2}{3}-\frac{x}{6} & ,\quad 1\le x\le 4\\ 0 & ,\quad \text{övriga } x\end{cases}$$

vara en täthetsfunktion

a. Beräkna den övre kvartilen.

Svar: Utifrån att den generaliserade integralen

$$\int_0^1\frac{x}{2}\,dx=\cdots=\frac{1}{4}$$

måste den fortsatta integralen

$$\int_1^b\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{6}\right)dx=\cdots=\frac{1}{2}$$

vilket ger oss andragradsekvationen

$$-\frac{b^2}{12}+\frac{2}{3}b-\frac{7}{12}=\frac{1}{2}$$

med den ena (rimliga) lösningen

$$b = x_{0.75} = 4-\sqrt{3} \approx 2{,}3$$

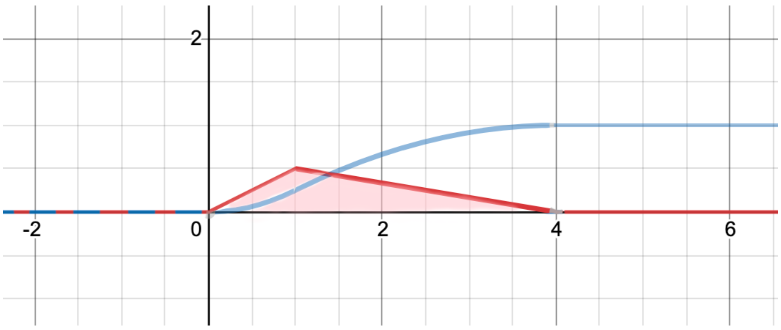
b. Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & , \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{1}{3} & , \quad 1 \le x \le 4 \\ 1 & , \quad x > 4 \end{cases}$$

c. Skissa täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar:



(3 p)

5) Funktionskurvorna

$$f(x) = \sqrt{16-x^2} \quad , \quad -4 \le x \le 0$$

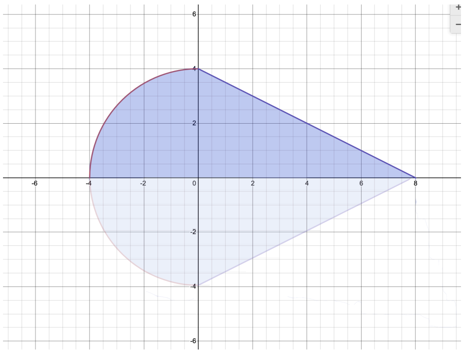
och

$$g(x) = 4-\frac{x}{2} \quad , \quad 0 \le x \le 8$$

roterar båda runt x-axeln och bildar tillsammans en rotationskropp.

a. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen.

Ledning:



Volymen fås med hjälp av integralerna

$$V = \pi \int_{-4}^{0} \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 dx + \pi \int_{0}^{8} \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \cdots = \frac{256\pi}{3}$$

b. Beräkna arean av den uppkomna rotationskroppen.

Ledning:

För "cirkelkurvan" gäller:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \cdots = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dx$$

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi\sqrt{16 - x^2} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dx = 8\pi dx$$

$$A = 8\pi \int_{-4}^{0} dx = \cdots = 32\pi$$

För den räta linjen gäller:

Kurvlängdssegment den räta linjen: $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \cdots = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$

$$dA = 2\pi y ds = \cdots = \pi\sqrt{5}\left(4 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$A = \pi\sqrt{5} \int_{0}^{8} \left(4 - \frac{x}{2}\right) dx = \cdots = 16\pi\sqrt{5}$$

Total area = $32\pi + 16\pi\sqrt{5}$

(3 p)

6) Beräkna med hjälp av derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler samt tydliga figurer:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Ledning: Följ beviset för Analysens Huvudsats (Föreläsning 4 och sid 286 i läroboken) och svaret blir e^{-x^2}.

(3 p)

7)

Bestäm alla lösningskurvor till

$$(1+x)^2y' - \sqrt{y}\ln x = 0$$

vilka passerar punkten $(1, 0)$.

Ledning: Se uppgift 9.48 i läroboken, ickelinjär av första graden och löses därmed genom separation av variablerna till

$$\frac{1}{\sqrt{y}}dy = \frac{\ln x}{(1+x)^2}dx \quad , \quad y \neq 0$$

$y = 0$ kontrolleras för sig och man finner en triviallösning!

Genom att integrera ledvis (med partiell integration och partialbråksuppdelning i den nya integralen i högerledet) får man

$$2\sqrt{y} = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln\frac{x}{1+x} + C$$

Och insättning av punkten $(1, 0)$ ger $C = \ln 2$ så att

$$y = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + \ln 2\right)^2$$

samt triviallösningen $y = 0$

(3 p)