

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen version a för kurs given VT2021

Examination: Modul TEN1 inom utbildning TNIU23

Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p

Bonus: 0-2 p grundad på KTR1 skriven tidigast 1 år före aktuellt datum

Lösningar: Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.

Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare

Skrivtid: 2021-03-20, kl. 08:00–13:00

Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1) Låt

$$y'' + 4y' = 8x + 14$$

a) Lös differentialekvationen

$$\text{Svar: } y = x^2 + 3x + C + De^{-4x}$$

b) Förklara skillnaden i betydelse av y_h och y_p .

Ledning: En partikulärlösning y_p är en lösningskurva till differentialekvationen medan y_h inte är det och istället berättar hur lösningskurvorna y_p tillåts variera för att fortfarande fungera som lösningskurvor.

(3 p)

2) Låt

$$y' = \frac{y}{x} \quad \text{för } x > 0$$

a) Lös differentialekvationen på ett valfritt sätt.

b) Lös differentialekvationen på ett annat sätt.

Ledning: Lösningar med integrerande faktor respektive variabelseparation ger båda lösningskurvorna $y = kx$ som alla är räta linjer genom origo.

c) Skissa tillhörande riktningsfält.

Ledning: Skissa räta linjer genom origo.

(3 p)

3) Gränsvärden

- a. Anpassa a så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 + ax + \sin 2x}{x - \arctan x}$$

Ledning: om ett ändligt gränsvärde skall finnas får täljaren i denna uppgift inte ha lägre grad utan lika grad eller högre grad än nämnaren. Med Maclaurinutveckling och förenkling får man

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^3) - 1 + ax + \left(2x - \frac{8x^3}{6}\right) + \mathcal{O}(x^5)}{x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \mathcal{O}(x^5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(a+2)}^{\text{nollställs för ändligt gränsvärde}} x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)}{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)} = \left| \begin{array}{l} \text{Om man} \\ \text{sätter} \\ a = -2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^3)}{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^3)} = -1$$

- b. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{a+4} \left(\frac{1}{x} + \arctan x \right) dx$$

Ledning: Resonemang enligt medelvärdessatsen för integraler med valt ξ enligt $a \leq \xi \leq a+2$ får man gränsvärdet 2π .

(3 p)

4) Låt

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} - \frac{x}{6} & , 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \text{övriga } x \end{cases}$$

vara en täthetsfunktion

- a. Beräkna den övre kvartilen.

Svar: Utifrån att den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx = \dots = \frac{1}{4}$$

måste den fortsatta integralen

$$\int_1^b \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{6} \right) dx = \dots = \frac{1}{2}$$

vilket ger oss andragradsekvationen

$$-\frac{b^2}{12} + \frac{2}{3}b - \frac{7}{12} = \frac{1}{2}$$

med den ena (rimliga) lösningen

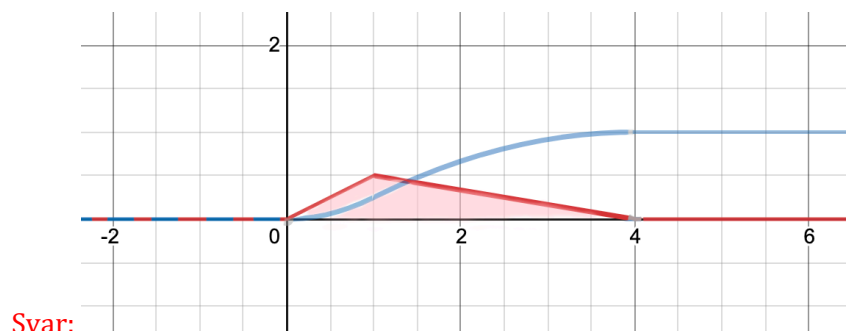
$$b = x_{0.75} = 4 - \sqrt{3} \approx 2,3$$

b. Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{12} - \frac{1}{3} & , 1 \leq x \leq 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

c. Skissa täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i ett gemensamt koordinatsystem.



(3 p)

5) Funktionskurvorna

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad , \quad -4 \leq x \leq 0$$

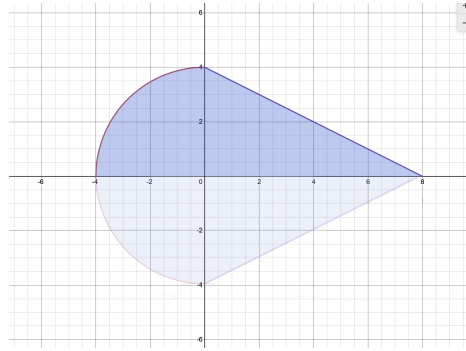
och

$$g(x) = 4 - \frac{x}{2} \quad , \quad 0 \leq x \leq 8$$

roterar båda runt x -axeln och bildar tillsammans en rotationskropp.

a. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen.

Ledning:



Volymen fås med hjälp av integralerna

$$V = \pi \int_{-4}^0 (\sqrt{16 - x^2})^2 dx + \pi \int_0^8 \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \dots = \frac{256\pi}{3}$$

b. Beräkna arean av den uppkomna rotationskroppen.

Ledning:

För "cirkelkurvan" gäller:

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \dots = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dx$$

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi \sqrt{16 - x^2} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dx = 8\pi dx$$

$$A = 8\pi \int_{-4}^0 dx = \dots = 32\pi$$

För den räta linjen gäller:

Kurvlängdssegment den räta linjen: $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \dots = \frac{\sqrt{5}}{2} dx$

$$dA = 2\pi y ds = \dots = \pi\sqrt{5} \left(4 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$A = \pi\sqrt{5} \int_0^8 \left(4 - \frac{x}{2}\right) dx = \dots = 16\pi\sqrt{5}$$

$$\text{Total area} = 32\pi + 16\pi\sqrt{5}$$

(3 p)

- 6) Beräkna med hjälp av derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler samt tydliga figurer:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Ledning: Följ beviset för Analysens Huvudsats (Föreläsning 4 och sid 286 i läroboken) och svaret blir e^{-x^2} .

(3 p)

7)

Bestäm alla lösningskurvor till

$$(1+x)^2 y' - \sqrt{y} \ln x = 0$$

vilka passerar punkten $(1, 0)$.

Ledning: Se uppgift 9.48 i läroboken, ickelinjär av första graden och löses därmed genom separation av variablerna till

$$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$$

Genom att integrera ledvis (med partiell integration och partialbråksuppdelning i den nya integralen i högerledet) får man

$$2\sqrt{y} = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x} + C$$

Och insättning av punkten $(1, 0)$ ger $C = \ln 2$ så att

$$y = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + \ln 2 \right)^2$$

Utöver denna lösning finns även trivallösningen $y = 0$

(3 p)