

Peter Holgersson, ITN

Linköpings Universitet

Tel. 0705-19 99 92

petho@itn.liu.se

## Tentamen inom Envariabelanalys II

*Ordinarie tentamen version b för kurs given VT2021*

Examination: Modul TEN1 inom utbildning TNIU23

Max: 21 p betyg 5:  $\geq 16$  p betyg 4:  $\geq 12$  p betyg 3:  $\geq 8$  p

Bonus: 0-2 p grundad på KTR1 skriven tidigast 1 år före aktuellt datum

Lösningar: Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.

Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare

Skrivtid: 2021-03-20, kl. 14:00–19:00

Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1) Låt

$$y'' - 4y' + 3y = 6e^{3x}$$

a) Lös differentialekvationen

$$\text{Svar: } y = Ce^x + De^{3x} + 3xe^{3x}$$

b) Bestäm den lösningskurva som uppfyller villkoren  $y(0) = 6$  och  $y'(0) = 13$ .

$$\text{Svar: } y = 4e^x + 2e^{3x} + 3xe^{3x}$$

(3 p)

2) Låt

$$y' = \frac{xy}{2}$$

a) Lös differentialekvationen genom att separera variablerna.

b) Lös differentialekvationen med hjälp av integrerande faktor.

**Ledning: Lösningar med integrerande faktor respektive variabelseparation ger båda**

$$\text{lösningskurvorna } y = Ce^{\frac{x^2}{4}}.$$

c) Förklara med egna ord vad ekvationens riktningsfält beskriver (utan att skissa det).

Svar: Riktningsfältet ger en förenklad bild av en mängd olika lösningskurvor  
 - detta genom att man marker kurvornas riktning i utvalda punkter.

(3 p)

### 3) Gränsvärden

- a. Anpassa  $a$  så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{x^2} + ax^2}{\arctan x^4}$$

Ledning: om ett ändligt gränsvärde skall finnas får täljaren i denna uppgift inte ha lägre grad utan lika grad eller högre grad än nämnaren. Med Maclaurinutveckling och förenkling får man

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24}\right) - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right) + ax^2 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4 + \mathcal{O}(x^8)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(a-3)}^{\text{nollställs för ändligt gränsvärde}} x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4 + \mathcal{O}(x^8)} = \left| \begin{array}{l} \text{Om man} \\ \text{sätter} \\ a = 3 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{1}{6}$$

- b. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{a+4} \left(3 - \frac{\sin x}{x}\right) dx$$

Ledning: Medelvärdessatsen för integraler ger gränsvärdet 12.

(3 p)

### 4) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & , -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{6} & , 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \text{övriga } x \end{cases}$$

- a. Visa att  $f_X(x)$  är en täthetsfunktion.

Ledning: Man visar att  $y = f_X(x) \geq 0$  i alla punkter samt att integralen över hela definitionsmängden blir 1.

- b. Beräkna den medianen.

Svar: Utifrån att den generaliserade integralen

$$\int_{-1}^0 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) dx = \dots = \frac{1}{4}$$

måste den fortsatta integralen för att ge summan  $\frac{1}{2}$

$$\int_0^b \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{6}\right) dx = \dots = \frac{1}{4}$$

vilket ger oss andragradsekvationen

$$-\frac{b^2}{12} + \frac{b}{2} = \frac{1}{4}$$

med den ena (rimliga) lösningen

$$b = x_{0,5} = 3 - \sqrt{6} \approx 0,55$$

c. Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & , -1 \leq x < 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{1}{4} & , 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & , x > 3 \end{cases}$$

(3 p)

5) Utgå från cirkelns ekvation  $x^2 + y^2 = r^2$  och visa med hjälp av rotation runt  $x$ -axeln att...

a. ...klotets volym är

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

*Lösningstips:*

Cirkelns ekvation  $r^2 = x^2 + y^2$  ger den övre funktionskurvan

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$  som roteras runt  $x$ -axeln:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-r}^r dV = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \dots = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

b. ...klotets area är

$$A = 4\pi r^2$$

*Lösningstips:*

Cirkelns ekvation  $r^2 = x^2 + y^2$  ger den övre funktionskurvan

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$  som roteras runt  $x$ -axeln:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-r}^r dA = \int_{-r}^r 0 \, ds = \int_{-r}^r 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \dots = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 2\pi [rx]_{-r}^r \\ &= 2\pi r^2 - (-2\pi r^2) = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

(3 p)

- 6) Beräkna med hjälp av bl.a. derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler samt tydliga figurer:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+t^4} dt$$

Ledning: Följ beviset för Analysens Huvudsats (Föreläsning 4 och sid 286 i läroboken) och svaret blir  $\frac{1}{1+x^4}$ .

(3 p)

- 7) Bestäm alla lösningskurvor till

$$(1+x)^2 y' - \sqrt{y} \ln x = 0$$

vilka passerar punkten  $(1, 0)$ .

Ledning: Se uppgift 9.48 i läroboken, icke linjär av första graden och löses därmed genom separation av variablerna till

$$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$$

Genom att integrera ledvis (med partiell integration och partialbråksuppdelning i den nya integralen i högerledet) får man

$$2\sqrt{y} = -\frac{\ln x}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x} + C$$

Och insättning av punkten  $(1, 0)$  ger  $C = \ln 2$  så att

$$y = \frac{1}{4} \left( \ln \frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + \ln 2 \right)^2$$

Utöver denna lösning finns även triviallösningen  $y = 0$

(3 p)