Peter Holgersson, ITN

Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen version b för kurs given VT2021

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU23
Max:	21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1 skriven tidigast 1 år före aktuellt datum
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare
Skrivtid:	2021-03-20, kl. 14:00–19:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1) Låt

$$y'' - 4y' + 3y = 6e^{3x}$$

a) Lös differentialekvationen

Svar: $y = Ce^{x} + De^{3x} + 3xe^{3x}$

b) Bestäm den lösningskurva som uppfyller villkoren $y(0) = 6$ och $y'(0) = 13$.

Svar: $y = 4e^{x} + 2e^{3x} + 3xe^{3x}$

(3 p)

2) Låt

$$y' = \frac{xy}{2}$$

a) Lös differentialekvationen genom att separera variablerna.

b) Lös differentialekvationen med hjälp av integrerande faktor.

Ledning: Lösningar med integrerande faktor respektive variabelseparation ger båda lösningskurvorna $y = Ce^{\frac{x^2}{4}}$.

c) Förklara med egna ord vad ekvationens riktningsfält beskriver (utan att skissa det).

Svar: Riktningsfältet ger en förenklad bild av en mängd olika lösningskurvor – detta genom att man marker kurvornas riktning i utvalda punkter.

(3 p)

3) Gränsvärden

a. Anpassa a så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - e^{x^2} + ax^2}{\arctan x^4}$$

Ledning: om ett ändligt gränsvärde skall finnas får täljaren i denna uppgift inte ha lägre grad utan lika grad eller högre grad än nämnaren. Med Maclaurinutveckling och förenkling får man

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{4x^2}{2}+\frac{16x^4}{24}\right)-\left(1+x^2+\frac{x^4}{2}\right)+ax^2+\mathcal{O}(x^6)}{x^4+\mathcal{O}(x^8)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{(a-3)}^{\substack{\text{nollställs}\\ \text{för ändligt}\\ \text{gränsvärde}}}\;x^2+\frac{1}{6}x^4+\mathcal{O}(x^6)}{x^4+\mathcal{O}(x^8)} = \left|\begin{matrix}\text{Om man}\\ \text{sätter}\\ a=3\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x^4)} = \frac{1}{6}$$

b. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+4}\left(3-\frac{\sin x}{x}\right)dx$$

(3 p)

4) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{1}{2} & , \quad -1\le x<0\\ \frac{1}{2}-\frac{x}{6} & , \quad 0\le x\le 3\\ 0 & , \quad \text{övriga } x\end{cases}$$

a. Visa att $f_X(x)$ är en täthetsfunktion.

Ledning: Man visar att $y = f_X(x) \ge 0$ i alla punkter samt att integralen över hela definitionsmängden blir 1.

b. Beräkna medianen.

Svar: Utifrån att den generaliserade integralen

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx = \cdots = \frac{1}{4}$$

måste den fortsatta integralen för att ge summan $\frac{1}{2}$

$$\int_0^b \left(\frac{1}{6}-\frac{x}{6}\right) dx = \cdots = \frac{1}{4}$$

vilket ger oss andragradsekvationen

$$-\frac{b^2}{12}+\frac{b}{2}=\frac{1}{4}$$

med den ena (rimliga) lösningen

$$b = x_{0.75} = 3-\sqrt{6} \approx 0{,}55$$

c. Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4} & , \quad -1 \le x < 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+\frac{1}{4} & , \quad 0 \le x \le 3 \\ 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

(3 p)

5) Utgå från cirkelns ekvation $x^2+y^2=r^2$ och visa med hjälp av rotation runt x-axeln att...

a. ...klotets volym är

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Lösningstips:

Cirkelns ekvation $r^2 = x^2+y^2$ ger den övre funktionskurvan $y = \sqrt{r^2-x^2}$ som roteras runt x-axeln:

$$A = \int_{-r}^{r} dV = \pi \int_{-r}^{r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)dx = \pi \left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \cdots = \frac{4\pi r^3}{3}$$

b. ...klotets area är

$$A = 4\pi r^2$$

Lösningstips:

Cirkelns ekvation $r^2 = x^2 + y^2$ ger den övre funktionskurvan

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ som roteras runt x-axeln:

$$A = \int_{-r}^{r} dA = \int_{-r}^{r} O\, ds = \int_{-r}^{r} 2\pi y\, \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \cdots = 2\pi \int_{-r}^{r} r dx = 2\pi [rx]_{-r}^{r}$$

$$= 2\pi r^2 - (-2\pi r^2) = 4\pi r^2$$

(3 p)

6) Beräkna med hjälp av bl.a. derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler samt tydliga figurer:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + t^4} dt$$

Ledning: Följ beviset för Analysens Huvudsats (Föreläsning 4 och sid 286 i läroboken) och svaret blir $\frac{1}{1+x^4}$.

(3 p)

7) Bestäm alla lösningskurvor till

$$(1 + x)^2 y' - \sqrt{y} \ln x = 0$$

vilka passerar punkten $(1, 0)$.

Ledning: Se uppgift 9.48 i läroboken, ickelinjär av första graden och löses därmed genom separation av variablerna till

$$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{\ln x}{(1 + x)^2} dx$$

Genom att integrera ledvis (med partiell integration och partialbråksuppdelning i den nya integralen i högerledet) får man

$$2\sqrt{y} = -\frac{\ln x}{1 + x} + \ln \frac{x}{1 + x} + C$$

Och insättning av punkten $(1, 0)$ ger $C = \ln 2$ så att

$$y = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + \ln 2\right)^2$$

Utöver denna lösning finns även triviallösningen $y = 0$

(3 p)