Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2021

Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Skrivtid:	2021-06-09, kl. 14:00–19:00			

---

1. Lös integralerna

a)

$$\int_{-4}^{4} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Ledning: Generaliseringen i $x = 0$ hävs och integralen visar sig vara divergent med det oegentliga gränsvärdet $+\infty$.

b)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dt$$

Ledning: Förlängning med e^x och variabelskifte $u = e^x$ ger en generaliserad integral med svaret $\frac{\pi}{4}$

c)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dt$$

Ledning: Variabelskifte $u = \tan x$ ger en integral med svaret $e - 1$.

(3 p)

2.

Lös differentialekvationen

$$y' + y = 5$$

med hjälp av **tre** olika lösningsmetoder – alltså på följande sätt:

I) Genom separation av variabler

II) Med hjälp av integrerande faktor

III) Genom att bestämma den homogena ekvationens lösning och till denna en partikulärlösning

Svar: Alla tre metoderna ger $y = 5 + Ce^{-x}$

(3 p)

3. Den stokastiska variabeln X anger hur lång tid t det normalt tar tills den första kunden dyker upp – angivet i minuter efter att affären öppnar. Variabeln beskrivs av *täthetsfunktionen*:

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} - \dfrac{t}{50} & \text{för } 0 \le t \le 10 \\ 0 & \text{övriga } t \end{cases}$$

a) Beräkna hur stor chansen är att den första kunden dyker upp inom tidsintervallet 5–15 min efter att affären öppnas.

Ledning: Integralen $\int_5^{15} f_X(t)dt = \int_5^{10} \left(\frac{1}{5} - \frac{t}{50}\right) dt = \cdots = \frac{1}{4}$

b) Beräkna medianen för X.

Ledning: $\int_{-\infty}^{b} f_X(t)dt = \int_0^b \left(\frac{1}{5} - \frac{t}{50}\right) dt = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow b = 10 \pm \sqrt{50}$

varav $b = 10 - \sqrt{50} \approx 2{,}93$ är av intresse.

c) Beräkna det förväntade värdet för X.

Ledning: Integralen $\int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt = \int_0^{10} \left(\frac{t}{5} - \frac{t^2}{50}\right) dt = \cdots = \frac{10}{3}$

(3 p)

4. Lös differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \sin x$$

Ledning: Ansats $y_p = e^{3x}(A \sin x + B \cos x)$ med tillhörande produktderivator ger tillsammans med y_h den allmänna lösningen $y = C_1 e^{x} + C_1 e^{2x} + \frac{1}{10} e^{3x}(\sin x - 3 \cos x)$
Se uppgift 8.42 c) i övningshäftet.

(3 p)

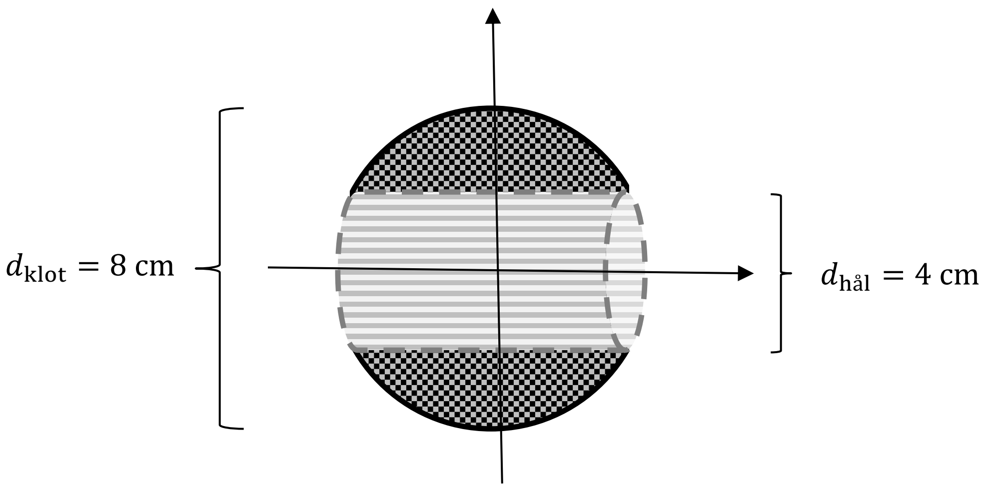
5. Beräkna längden av spiralen

$$\begin{cases} e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \cos t \end{cases}, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Ledning: Kurvlängd för parameterkurva ger efter förenkling med trigettan integralen $\sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^{-t}\, dt = \cdots = \sqrt{2}(1 - e^{-2\pi})$
Se uppgift 7.44 i övningshäftet.

(3 p)

6. Beräkna volymen av kroppen som uppstår efter att ett centrerat hål diametern $d_{\text{hål}} = 4$ cm borrats rakt genom ett massivt klot med diametern $d_{\text{klot}} = 8$ cm.



Ledning: Kroppen beskrivs av den rotationskropp som uppstår då det begränsade området mellan kurvan $y = \sqrt{16 - x^2}$ och linjen $y = 2$ roterar ett varv kring x-axeln. Integrationsgränserna beräknas till $x = \pm\sqrt{12}$. Den yttre volymen minus hålrummet som är en rak cirkulär cylinder blir

$$V = V_{\text{yttre}} - V_{\text{inre}} = \pi \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 dx - \overbrace{\underbrace{\pi 2^2}_{\substack{\text{hålets} \\ \text{snitt–} \\ \text{area}}} \underbrace{\left(\sqrt{12} - \left(-\sqrt{12}\right)\right)}_{\text{hålets längd}}}^{\text{hålets volym}}$$

$$= 2\pi \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{12}} - 8\pi\sqrt{12} = 2\pi\left(16\sqrt{12} - 4\sqrt{12}\right) - 8\pi\sqrt{12}$$

$$= 16\pi\sqrt{12} = 32\pi\sqrt{3} \quad \text{volymenheter}$$

(3 p)

7. Låt

$$\int_a^x e^{t^2}\, dt = S(x)$$

a) På vilken grund tillåts man göra följande omskrivning – vad stödjer man sig på rent matematiskt:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x e^{t^2}\, dt = |\text{Motivering}| = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

Svar: Genom att sätta $\int_a^x e^{t^2}\, dt = S(x)$ (visa gärna med en skiss) och sedan derivera med avseende på x får man vänsterledet som kan skrivas $S'(x)$ och med hjälp av derivatans definition får man högerledet.

b) På vilka grunder tillåts man göra följande omskrivning – vad stödjer man sig på rent matematiskt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} e^{t^2}\, dt = |\text{Motiveringar}| = e^{x^2}$$

Svar: Tack vare att funktionen $f(t) = e^{t^2}$ är kontinuerlig kan man stödja sig på Medelvärdessatsen för integraler. Själva integralen $\int_x^{x+h} e^{t^2}\, dt$ kan med hjälp av satsen ersättas med "höjd gånger bredd" enligt $\underbrace{e^{\xi^2}}_{\text{höjd}} \underbrace{\left((x+h) - h\right)}_{\text{bredd}} = e^{\xi^2} h$, förutsatt att $x \leq \xi \leq x + h$.

Vänsterledet kan därmed skrivas som $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} e^{\xi^2} h = \lim\limits_{h \to 0} e^{\xi^2}$

Eftersom att $x \leq \xi \leq x + h$ kommer $\xi \to x$ då $h \to 0$ så att $\lim_{h \to 0} e^{\xi^2} \;\; e^{x^2}$.

(3 p)