Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2020

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			
Skrivtid:	2021-08-28, kl. 08:00–13:00			

1.

a) Lös differentialekvationen

$$xy' = y^2 + 1 \quad , \quad x > 0$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras och lösningen fås via ledvis integration enligt

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x}$$

Till sist löses y ut

Svar: $y = \tan(\ln x + C)$, då $\ln x + C \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in \mathbb{Z}$

b) Lös differentialekvationen

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x \quad , \quad x > 0$$

Lösningstips:

Differentialekvationen är linjär av första ordningen och löses exempelvis genom multiplikation med en integrerande faktor

$$h(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln[x]} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \quad \text{för } x > 0$$

Man erhåller

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \cos x$$

med ett vänsterled som kan skrivas som ”derivatan av en produkt”

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \cos x$$

Ledvis integration och y löses ut

Svar: $y = x(\sin x + C)$

c) Visa att ansatsen $y = Ce^{rx}$ med $C \neq 0$ ger den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + ar + b = 0$$

för differentialekvationen

$$y'' + ay' + by = 0$$

Lösningstips:

Insättning av $y = Ce^{rx}$, $y' = Cre^{rx}$ och $y'' = Cr^2e^{rx}$ ger

$$Cr^2e^{rx} + aCre^{rx} + bCe^{rx} = \underbrace{Ce^{rx}}_{\neq 0}\underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0} = 0$$

vilket ger den sökta karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$

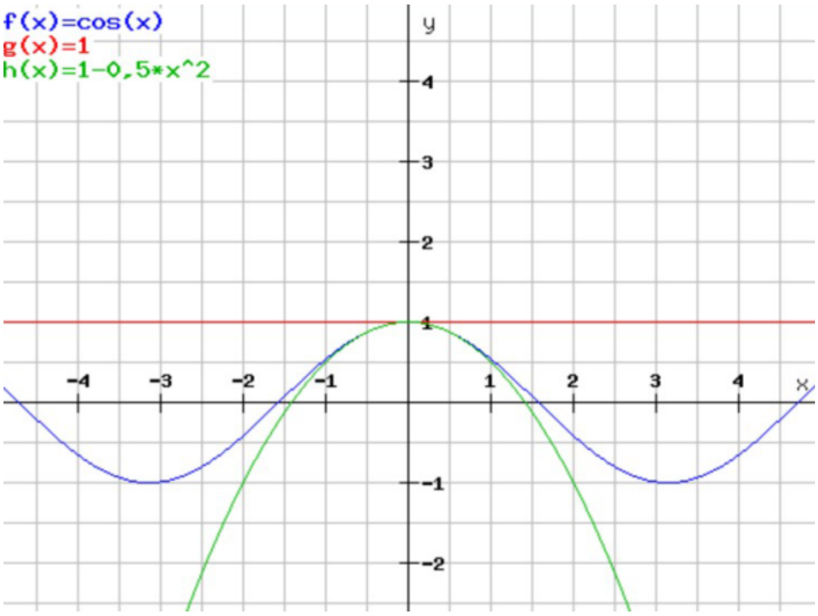
(3 p)

2.

a) I en omgivning till $x = 0$:
Skissa kurvan till $f(x) = \cos x$ samt kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 0 och grad 2 i ett *gemensamt* koordinatsystem.

Lösningstips:

Kurvor tillhörande Maclaurinpolynomen $p_0(x) = 1$ och $p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $f(x) = \cos x$ skissas och man ser att $p_2(x)$ bättre approximerar $f(x)$ än vad $p_0(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$.



b) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\sin x^2}{x(1-\cos x)}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\sin x^2}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - 1\right)\left(x^2 - O(x^6)\right)}{x\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + O(x^4)}{\frac{x^3}{2} + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + O(x)\right)}{\frac{1}{2} + O(x)} = 2$$

Även standardgränsvärde ger en smidig lösning…

Svar: 2

(3 p)

3.

Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1+x^2} & då \; -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

a) Anpassa konstanten a så att $f(x)$ blir en täthetsfunktion.

Lösningstips:

Definitionen av täthetsfunktion ger i denna uppgift integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{a}{1+x^2}dx = [a \arctan x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{2a\pi}{3} = |\text{krav}| = 1$$

som visar att $a = \frac{3}{2\pi}$

Svar: $a = \frac{3}{2\pi}$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

Lösningstips:

För fördelningsfunktioner gäller enligt sats att de är växande samt att

$$F(x) \to 1 \text{ då } x \to \infty$$

och

$$F(x) \to 0 \text{ då } x \to -\infty$$

I detta fall gäller att då $x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ är

$$F(x) = \frac{3}{2\pi}\arctan x + C$$

C anpassas så att

$$F\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2\pi}\arctan\sqrt{3} + C = \frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 1$$

$$F\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2\pi}\arctan\left(-\sqrt{3}\right) + C = -\frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 0$$

Därmed inses att $C = \frac{1}{2}$

Svar: $F(x) = \frac{3}{2\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$

c) Bestäm den övre kvartilen.

Lösningstips:

Definitionen av övre kvartil $x_{0.75}$ ger i detta fall

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \frac{3}{2\pi}\int_{-\sqrt{3}}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3}{2\pi}[\arctan x]_{-\sqrt{3}}^{b}$$

$$= \frac{3}{2\pi}\left(\arctan b - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = |\text{krav}| = \frac{3}{4}$$

Som visar at $\arctan b = \frac{\pi}{6}$ och därmed att $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Svar: $x_{0.75} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}57$

(3 p)

4.

a) Beräkna *volymen* av den rotationskropp som alstras då området mellan de tre räta linjerna $y = \frac{r}{h}x$, $x = h$ och $y = 0$ (med r och $h > 0$) roterar ett varv runt x-axeln.

Lösningstips:

Ett volymelement

$$dV = \pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$$

Hela volymen, i detta fall en kon

$$V = \int_0^h dV = \pi\int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Svar: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

b) Beräkna *arean* av den rotationsyta som alstras då cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ roterar ett varv runt x -axeln.

Lösningstips:

Ekvationen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

beskriver en cirkel med radien r och centrum i origo. Övre halvan av cirkeln beskrivs av funktionen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

med derivatan

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Mantelarena av ett ”cirkelband”

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi r\,dx$$

Hela klotarean:

$$A = \int_{-r}^{r} dA = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r[x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2$$

Svar: $A = 4\pi r^2$

(3 p)

5.

Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 4y' = -6e^{3x} - 8x - 6$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y'(0) = 24$ och $y(0) = 11$.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' - 4y' = 0$$

löses med hjälp av tillhörande karaktäristiska ekvation

$$r^2 - 4r = r(r - 4) = 0$$

vars rötter ger

$$y_h = A + Be^{4x}$$

Partikulära lösningar fås exempelvis med ansatsen

$$y' = Cx + D + Ee^{3x}\ , \qquad y'' = C + 3Ee^{3x}$$

Insättning i ekvationen

$$y'' - 4y' = -6e^{3x} - 8x - 6$$

ger

$$\Leftrightarrow C + 3Ee^{3x} - 4(Cx + D + Ee^{3x}) = -6e^{3x} - 8x - 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4C = -8 \\ C - 4D = -6 \\ E = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 2 \\ E = 6 \end{cases}$$

med partikulärlösningen

$$y'_p = 2x + 2 + 6e^{3x}$$

som har *en* primitiv funktion och partikulärlösning

$$y_p = x^2 + 2x + 2e^{3x}$$

Enligt sats 9.1 räcker det nu att lägga till den homogena ekvationens lösningar för att finna samtliga lösningar

$$y = y_p + y_h = x^2 + 2x + 2e^{3x} + A + Be^{4x}$$

För att uppfylla villkoren deriveras lösningarna

$$y' = 2x + 2 + 6e^{3x} + 4Be^{4x}$$

Villkoret

$$y'(0) = 24 \text{ ger } B = 4$$

och

$$y(0) = 11 \text{ ger } A = 5$$

Svar: $y = x^2 + 2x + 2e^{3x} + 5 + 4e^{4x}$

(3 p)

6.

Bestäm kurvlängden för $f(x) = -\ln(\cos x)$ då $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

Lösningstips:

Derivering ger $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

Ett bågelement

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + (\tan x)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx = \left| x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \right| = \frac{1}{\cos x}\, dx$$

Hela kurvlängden

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{6}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}\, dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix} \right|$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2 - 1}\, dt = |\text{PBU}| = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}}{t + 1}\, dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{t - 1}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(t + 1)]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}[\ln|t - 1|]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln 1 - \ln\frac{1}{2} + \ln 1\right) = \frac{\ln 3}{2}$$

Svar: $\frac{\ln 3}{2}$

(3 p)

7.

a) Antag att f är kontinuerlig på I samt att x och $a \in I$.

Bevisa utifrån bland annat medelvärdessatsen för integraler att

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Lösningstips:

Beviset av Analysens huvudsats finns under Sats 6.7 på sid 286 i läroboken samt i föreläsningsanteckningarna.

b) Beräkna

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4} e^{\sqrt{t}}dt$$

Lösningstips:

Generellt gäller

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = |\text{sats } 6.2| = \int_a^{\psi(x)} f(t)dt - \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = \left|\begin{matrix}\text{insättnings} - \\ \text{formeln}\end{matrix}\right|$$

$$= \Big(F\big(\psi(x)\big) - F(a)\Big) - \Big(F\big(\varphi(x)\big) - F(a)\Big) = F\big(\psi(x)\big) - F\big(\varphi(x)\big)$$

Derivering ger

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\Big(F\big(\psi(x)\big) - F\big(\varphi(x)\big)\Big)$$

$$= |\text{kedjeregeln}| = f\big(\psi(x)\big)\psi'(x) - f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)$$

Med $f(t) = e^{\sqrt{t}}$, $\psi(x) = x^4$ och $\varphi(x) = x^2$ erhåller man

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4} e^{\sqrt{t}}dt = f(x^4)4x^3 - f(x^2)2x$$

$$= e^{\sqrt{x^4}}4x^3 - e^{\sqrt{x^2}}2x = e^{x^2}4x^3 - e^{|x|}2x$$

Svar: $e^{x^2}4x^3 - e^{|x|}2x$

(3 p)