Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen för kurs given VT2022

Examination: Modul TEN1 inom utbildning TNIU23
Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0-2 p grundad på KTR1 skriven tidigast 1 år före aktuellt datum
Lösningar: Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare
Skrivtid: 2022-03-21, kl. 14:00–19:00
Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1) Låt

$$y'' + y' = -10 \sin 2x$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Svar: $y = \cos 2x + 2 \sin 2x + C + De^{-x}$

b) Förklara skillnaden i betydelse av y_h och y_p i den allmänna lösningen.

Svar: y_p är en av oändligt många lösningar (eller lösningskurvor) för differentialekvationen medan y_h är de tillägg som ger de övriga lösningskurvorna och alltså i sig inte är någon lösning (eller lösningskurva) till differentialekvationen.

(3 p)

2) Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}2 & , \quad 2 \leq x < 4 \\ 0{,}1 & , \quad 4 \leq x \leq 10 \\ 0 & , \quad \text{övriga } x \end{cases}$$

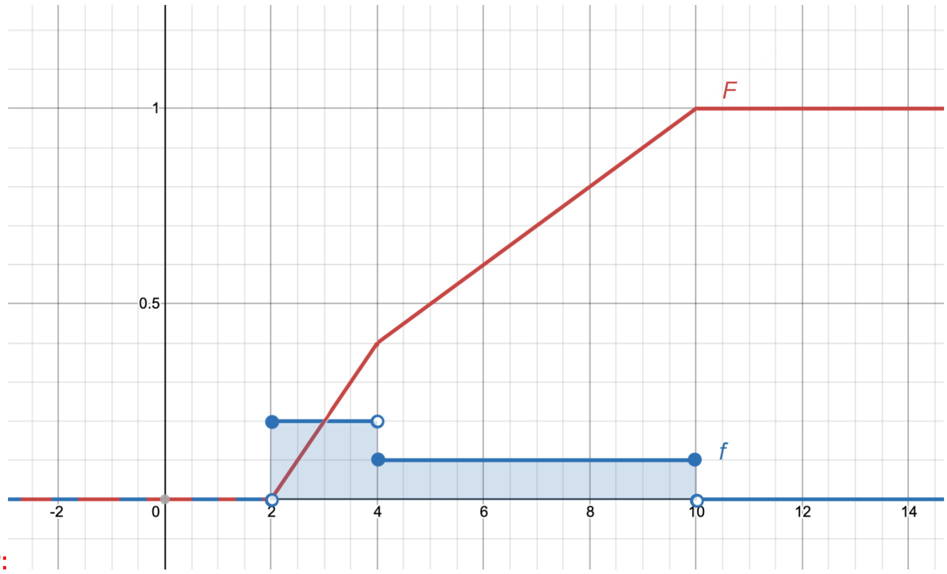
vara en täthetsfunktion för en stokastisk variabel X.

a) Bestäm fördelningsfunktionen.

Svar: $F_X(x) = \begin{cases} 0{,}2x - 0{,}4 & , \quad 2 \leq x < 4 \\ 0{,}1x & , \quad 4 \leq x \leq 10 \\ 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$

b) Skissa täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar:



c) Beräkna kvantilen $x_{0.8}$.

Svar: $x_{0.8} = 8$

(3 p)

3) Temperaturförändringen T' per timme t hos ett alkoholfritt vin beskrivs i en viss miljö av differentialekvationen

$$T' = 48 - 2T$$

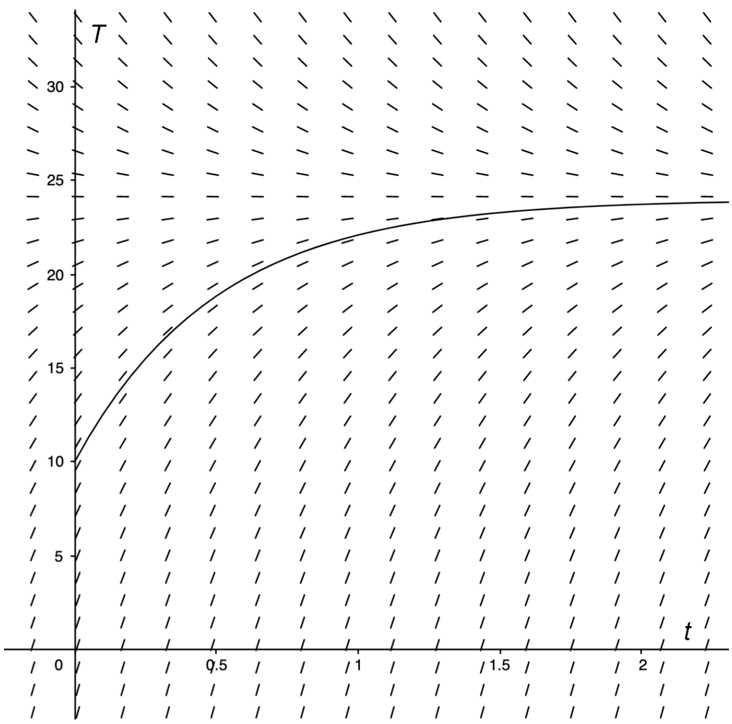
a) Lös differentialekvationen på ett valfritt sätt.

Svar: Metoderna Integrerande faktor (1), separation av variablerna (2) eller genom att bestämma T_h och T_h (3) ger alla den allmänna lösningen $T = 24 + Ce^{-2t}$

b) Lös differentialekvationen på ett annat sätt.

Svar: Se uppgift a)

c) Förklara vad den markerade kurvan i riktningsfältet nedan beskriver:



Svar: Den markerade lösningskurvan är den partikulärlösning som uppfyller villkoret $T = 10$ då $t = 0$. Precis som alla lösningskurvor närmar den sig $T = 24$ då $t \to \infty$.

(3 p)

4)

a) Anpassa konstanterna a och b så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna därefter gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}+a+bx^4+\cos x^2}{x^8}$$

Svar: Med $a=-2$ och $b=-\frac{1}{2}$ får man det ändliga gränsvärdet $\frac{13}{24}$.

b) Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x-2}^{x+4}\left(\arctan x+\frac{1}{10^x}\right)\,dx$$

Svar: 3π

(3 p)

5) Anpassa konstanterna i polynomet

$$p(x)=A+Bx+Cx^2$$

så att polynomet överensstämmer så bra som möjligt med funktionen

$$f(x)=\ln(2+3x)$$

i en omgivning till $x=0$.

Svar: $p(x)=\ln 2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2$

(3 p)

6) Låt funktionskurvan

$$f(x)=\frac{1}{x}\ ,\ \ x\geq 1$$

rotera ett varv runt x-axeln och beräkna strutens mantelarea.

Lösningstips: Se övningsuppgift Ö7.73 och Exempel 7.15 i läroboken.

$$A=2\pi\int_1^\infty\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx>2\pi\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=\cdots=\infty$$

Integralen är divergent med det oegentliga gränsvärdet oändligheten – alltså oändlig mantelarea. Dock är volymen ändlig med värdet 1 vilket kan vara svårt att ta till sig ☺

(3 p)

7) Ange den enda funktionskurvan $y(x)$ med tillhörande definitionsmängd som uppfyller

$$y(x) = 2 - \frac{1}{8}\int_4^x \big(y(t)\big)^2 dt$$

(3 p)

Lösningstips:

Man kan omedelbart se att den enda funktionen (lösningskurvan) som löser ekvationen måste passera punkten $(4, 2)$, detta eftersom $x = 4$ nollställer integralen.

Ledvis derivering – integralen med hjälp av Analysens huvudsats – ger den linjära differentialekvationen

$$y'(x) = -\frac{1}{8}\big(y(x)\big)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{8}$$

Den separabla ekvationen löses man får allmänna lösningen

$$y = \frac{8}{x + C}$$

Insättning av punkten $(4, 2)$ ger $C = 0$ och den enda godkända funktionen är därmed

$$y = \frac{8}{x}$$

På rätt sida om hålet i definitionsmängden blir svaret

$$y = \frac{8}{x} \quad , \quad x > 0$$