Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2022

Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Skrivtid:	2022-06-09, kl. 14:00–19:00			

1.

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' + y = x$$

Lösningstips:
Exempelvis integrerande faktor ger den allmänna lösningen

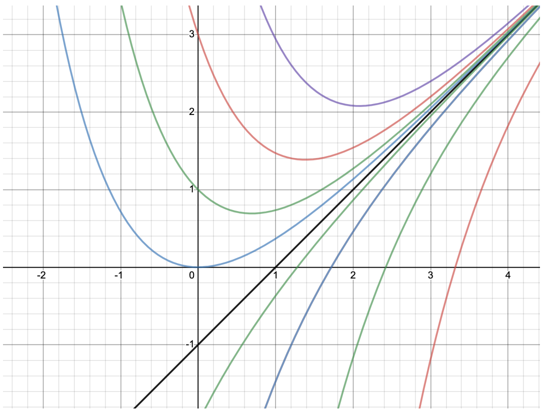
$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

b) Ange den enda rätlinjiga lösningskurvan och förklara varför alla andra lösningskurvor närmar sig den då $x \to \infty$.

Svar: $y = x - 1$ tack vare att termen $Ce^{-x} \to 0$ då $x \to \infty$

c) Skissa riktningsfältet för lämpligt utvalda x-värden.

Svar:



3 p

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + y' = e^{-x} + x$$

Lösningstips:

Den karaktäristiska ekvationen ger den homogena ekvationens lösning $y_h = A + Be^{-x}$ och man finner alltså den ena termen i ekvationens högerled – en ”kollision” med enklaste ansatsen för y_p – vilket därefter påverkar valet av ansats vid bestämning partikulära lösningar.

Exempelvis ansatsen $y_p = Cx^2 + Dx + E + z(x)e^{-x}$ med tillhörande derivator ger partikulärlösningen

$$y = y_h + y_p = A + Be^{-x} + \frac{x^2}{2} - x - xe^{-x}$$

Sammanfattningsvis får man enligt superposition den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x - xe^{-x}$$

3 p

3.

a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x + e^{4x} - 2 - 4x}{\sin 2x - 2x}$$

Lösningstips:

MacLaurin-utveckling t.o.m. grad 3 (för att undvika noll i nämnaren) ger gränsvärdet -8.

b) Anpassa a så att gränsvärde existerar ändligt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + ax) - 2x + \arctan(ax)}{x^2}$$

Lösningstips:

MacLaurin-utveckling t.o.m. grad 2 ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax - \frac{(ax)^2}{2} - 2x + ax + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2a - 2}^{\text{nollställs}} - \frac{a^2x}{2} + \mathcal{O}(x^2)}{x}$$

Vilket kräver att $a = 1$ (så att $2a - 2$ nollställs) för att gränsvärdet inte skall bli oändligt. Med $a = 1$ blir gränsvärdet $-\frac{1}{2}$.

3 p

4. Beräkna

a)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

Lösningstips:

Partialbråksuppdelning med ansatsen

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

ger $B = 1,\ D = -1$ och $A = C = 0$ och den nya generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

Generaliseringen hävs genom gränsvärdesstudie och ”standardprimitiver” ger svaret $1 - \frac{\pi}{4}$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{x+4} \arctan t\, dt$$

Lösningstips:

Integralkalkylens medelvärdessats används och tack vare att $f(\xi) \to \frac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$ och $\Delta x = 4$ blir svaret gränsvärdet 2π.

c)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Lösningstips:

Substitutionen med $y = \arcsin x$ med tillhörande derivata ger smidig lösning med svaret $\frac{\pi^2}{72}$

3 p

5.

a) Visa att täthetsfunktionen

$$y = \begin{cases} 2x-4 & , \quad x \in [2,3] \\ 0 & , \quad \text{annars} \end{cases}$$

har olika väntevärde och median.

Lösningstips:

Integrationsgränsen b i den bestämda integralen $\int_2^b (2x-4)dx = \frac{1}{2}$ ger medianen $x_{0.5} = b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 2.71$

Integralen $\int_2^3 x(2x-4)dx$ ger väntevärdet $\mu = \frac{8}{3} \approx 2.67$

Alltså olika median och väntevärde.

b) Bestäm $P(X > 2{,}5)$

Integralen $\int_{2,5}^3 (2x-4)dx$ ger sannolikheten 0.75

3 p

6. En arm följer en parameterkurva i *xy*-planet enligt

$$\begin{cases} x(t) = 4e^t \\ y(t) = e^{2t} - 2t \end{cases} \qquad då\ \ 0 \le t \le 2$$

Bestäm kurvans längd.

Lösningstips:

Bågelementet

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt = \sqrt{(4e^t)^2 + (2e^{2t}-2)^2}\ dt$$

$$= \sqrt{(4e^t)^2 + (2e^{2t}-2)^2}\ dt = \cdots = \sqrt{(2e^{2t}+2)^2}\ dt = (2e^{2t}+2\,)dt$$

integreras och kurvlängden blir $s = e^4 + 3 \approx 57{,}6$ längdenheter

3 p

7. Ange den enda funktionen $y(x)$ som uppfyller

$$y(x) = 1 + \int_2^x \big(y(t)\big)^2 dt$$

Lösningstips:

Man kan inledningsvis se att den sökta lösningskurvan måste passera punkten $(2,1)$, detta eftersom $x = 2$ nollställer integralen.

Ledvis derivering – integralen med hjälp av Analysens huvudsats – ger den linjära differentialekvationen

$$y'(x) = \big(y(x)\big)^2 \qquad \text{alltså} \qquad \frac{dy}{dx} = y^2$$

Den separabla ekvationen löses man får allmänna lösningen

$$y = \frac{1}{C - x}$$

Insättning av punkten $(2,1)$ kräver att $C = 3$ och den enda godkända funktionen är därmed

$$y = \frac{1}{3 - x}$$

På rätt sida om hålet i definitionsmängden blir svaret

$$y = \frac{1}{3 - x} \quad , \quad x < 3$$

3 p