Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2022

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			
Skrivtid:	2022-08-27, kl. 08:00–13:00			

1.

Bestäm

a)

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Lösningstips:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} y = 1-x^2 \\ \dfrac{dy}{dx} = -2x \\ "-dy = 2x\,dx" \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = -2\sqrt{y} + C = -2\sqrt{1-x^2} + C$$

b)

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^3} e^{t^2}\,dt$$

Lösningstips:

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^3} e^{t^2}dt = \begin{bmatrix} \text{Analysens huvudsats eller} \\ \text{Krzysztofs formel} \end{bmatrix} = e^{x^6}3x^2 - e^{\sin^2 x}\cos x$$

c)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \; dx$$

Lösningstips:

Exempelvis partiell integration ger svaret 0.

3 p

2.

Ange samtliga lösningar till differentialekvationen

$$y'' + 3y' = (1 - 2x^2)e^{-x}$$

Lösningstips:

Inledningsvis löser man den homogena ekvationen

$$y'' + 3y' = 0$$

med hjälp av dess karaktäristiska ekvation

$$r^2 + 3r = r(r + 3) = 0$$

som har lösningarna

$$r_1 = 0 \text{ och } r_2 = -3$$

och ger den homogena ekvationens lösning

$$y_h = A + Be^{-3x}$$

Noter att y_h inte på egen hand löser ekvationen i uppgiften (annorlunda högerled) men y_h kompletterar y_p (som strax skall bestämmas) så att dessa båda tillsammans ger den allmänna lösningen.

Ansats väljs exempelvis enligt följande med funktionen $z(x)$ enligt

$$y_p = ze^{-x}$$

med tillhörande derivator

$$y_p' = z'e^{-x} - ze^{-x}$$

$$y_p'' = z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}$$

Insättning ger efter förenkling

$$(z'' + z' - 2z)e^{-x} = (1 - 2x^2)e^{-x}$$

Med $z = Cx^2 + Dx + E$ och tillhörande derivator får man efter förenkling

$$(-2Cx^2 + (2C - 2D)x + 2C + D - 2E)e^{-x} = (1 - 2x^2)e^{-x}$$

med ett ekvationssystem som ger

$$\begin{cases} -2C = -2 \\ 2C - 2D = 0 \\ 2C + D - 2E = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1 \\ D = 1 \\ E = 1 \end{cases}$$

så att

$$y_p = (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

Den allmänna lösningen blir

$$y = y_p + y_h = (x^2 + x + 1)e^{-x} + A + Be^{-3x}$$

3 p

3.

Låt

$$y = f(x) = \sin x + \cos x$$

a) Bestäm Maclaurinpolynom av grad 0, 1 och 2 till $f(x)$.

Svar:

Polynomen blir

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = 1 + x$$

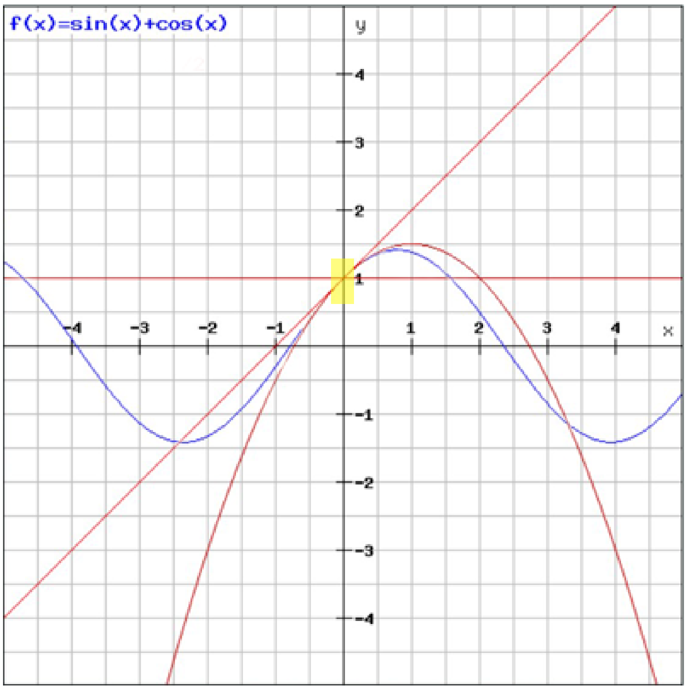
$$p_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$$

b) Skissa de tre Maclaurin-kurvorna i samma koordinatsystem som $f(x)$ i en omgivning till origo.

Lösningstips:

Värdetabeller ger följande utseende jämfört $f(x) = \sin x + \cos x$ (= den blå kurvan).

Notera att p_0 har rätt funktionsvärde i $x = 0$, att p_1 dessutom har rätt förstaderivata i $x = 0$ och att p_2 dessutom har rätt andraderivata (rätt ”avböjning”) i $x = 0$:



4.

Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området mellan x-axeln och $y = \cos x$, inom intervallet $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$...

a) ...roterar runt x-axeln.

Lösningstips:

$$dV = \pi \underbrace{(0 - \cos x)^2}_{\substack{\text{under} \\ x-\text{axeln}}} dx = \pi \cos^2 x \, dx = \cdots = \pi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left((\pi + 0) - \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) \right) = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{(volymenheter)}$$

b) ...roterar runt y-axeln.

Lösningstips:

$$dV = 2\pi x \underbrace{(0 - \cos x)}_{\substack{\text{under} \\ x-\text{axeln}}} dx = -2\pi x \cos x \, dx$$

$$V = -2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x \, dxdx = -2\pi \left([x \sin x]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dxdx \right)$$

$$= -2\pi \left([x \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = -2\pi \left(\left(0 - \frac{\pi}{2} \right) - (-(-1) - 0) \right)$$

$$= \pi^2 + 2\pi \quad \text{(volymenheter)}$$

3 p

5.

Låt

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{för } e \leq x \leq b \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

a) Anpassa b så att $f(x)$ blir en täthetsfunktion för någon stokastisk variabel X.

Lösningstips:

Vi noterar inledningsvis att kravet $f(x) \geq 0$ är uppfyllt inom aktuellt intervall. Vidare gäller kravet att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{e}^{b} \frac{1}{x}\,dx = \cdots = 1$$

vilket ger $b = e^2 \approx 7$

b) Beräkna sannolikheten $P(e \leq X \leq 5)$.

Lösningstips:

$$\int_{e}^{5} \frac{1}{x}\,dx = \cdots = \ln 5 - 1 \approx 0{,}6$$

c) Bestäm väntevärdet för $f(x)$.

Lösningstips:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{e}^{e^2} x\frac{1}{x}\,dx = \cdots = e^2 - e \approx 5$$

3 p

6.

Bestäm längden av kurvan $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ då $x \in [1, 2]$.

Lösningstips:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx \\ y' = x^2 - \dfrac{1}{4x^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + x^4 - \frac{2}{4} + \frac{1}{16x^4}}$$

$$= \sqrt{x^4 + \frac{2}{4} + \frac{1}{16x^4}}$$

$$= \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2}$$

$$= \left|x^2 + \frac{1}{4x^2}\right|$$

Hela kurvans längd:

$$s = \int_1^2 \left|x^2 + \frac{1}{4x^2}\right| dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{59}{24} \quad (l.e.)$$

7.

En av oändligt många lösningskurvor $y(x)$ till differentialekvationen

$$(x^2 - x)y' = x(y^2 - y)$$

passerar punkten $(2, 3)$.

Bestäm lösningskurvans ekvation och tillhörande intervall.

Lösningstips:

Differentialekvationen

$$(x^2 - x)\frac{dy}{dx} = x(y^2 - y)$$

är separabel och man får

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{1}{x - 1} dx$$

Faktorisering och partialbråksuppdelning ger

$$\left(\frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{x - 1} dx$$

Notera att $x \neq 1, y \neq 0$ och $y \neq 1$

Integrering av båda leden ger

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x-1| + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x-1| + C$$

Insättning av punkten $(2, 3)$ ger $C = \ln\frac{2}{3}$ och man får

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x-1| + \ln\frac{2}{3}$$

För kurvor med $x > 1$ (och $y > 2$), med hänsyn tagen till punkten $(2, 3)$, gäller förenklat

$$\ln\frac{y-1}{y} = \ln(x-1) + \ln\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\frac{y-1}{y} = \ln\frac{2(x-1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{y} = \frac{2(x-1)}{3}$$

y löses ut och man får

$$y = \frac{3}{5-2x} \quad , \quad x \in \left]1, \frac{5}{2}\right[$$

3 p