Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen för kurs given VT2023

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1 skriven tidigast 1 år före aktuellt datum			
Lösningar:	Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare			
Skrivtid:	2023-03-20, kl. 14:00–19:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Låt

$$y' = y - x$$

a) Lös differentialekvationen på valfritt sätt.

Lösningstips:

Ekvationen skrivs på normalform enligt $y' - y = -x$ och med hjälp av en integrerande faktor e^x får man

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -xe^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(ye^{-x}) = -xe^{-x}$$

som efter ledvis integration (partiell integration i högerledet) ger den allmänna lösningen

$$y = x + 1 + Ce^x$$

b) Skissa tillhörande riktningsfält för $-2 \leq x \leq 2$ och $-1 \leq y \leq 3$ och markera särskilt den lösningskurva som passerar punkten $(1,\ 2)$.

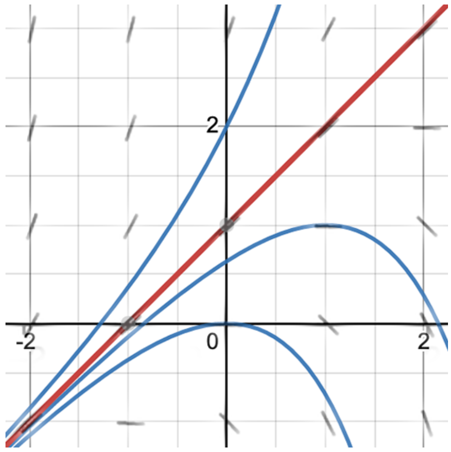
Lösningstips:

Man låter x och y variera inom intervallen ovan och beräknar kurvornas derivata (tangenters k-värden) ur

$$y' = y - x$$

I exempelvis punkten $(1,\ 2)$ får man $y' = 2 - 1 = 1$ vilket markers med en liten tangent i punkten.

Med $C = 0$ får man lösningskurvan $y = x + 1$ (röd i bilden) som passerar punkten $(1,\ 2)$ vilken är den enda lösningskurvan som är en rät linje.



3 p

2. Låt

$$y'' - 4y' + 3y = 8e^{3x}$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Lösningstips:

Med hjälp av den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3 = 0$ bestämmer man motsvarande homogena ekvations lösningar

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{3x}$$

Med ansats $y_p = ze^{3x}$ och tillhörande derivator får man efter insättning

$$z'' + 2z' = 8$$

så att

$$z' = 4$$

och en partikulärlösning

$$z = 4x$$

duger med

$$y_p = 4xe^{3x}$$

så att den allmänna lösningen blir

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} + 4xe^{3x}$$

b) Bestäm den lösningskurva som uppfyller de båda begynnelsevillkoren $y(0) = 7$ och $y'(0) = 17$.

Lösningstips:

Insättning i den allmänna lösningen och tillhörande derivata ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ C_1 + 3C_2 + 4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

och den sökta lösningskurvan blir

$$y = 4e^x + 3e^{3x} + 4xe^{3x}$$

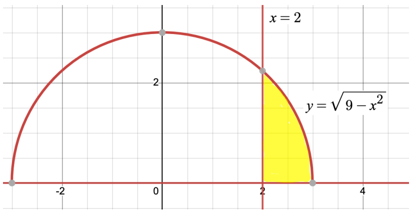
3 p

3. Ett begränsat område i första kvadranten innesluts av kurvan $y = \sqrt{9 - x^2}$, den räta linjen $x = 2$ och x-axeln.

a) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer om området roterar runt x-axeln.

Lösningstips:

Det enda området som helt innesluts av de tre nämnda och samtidigt ligger i 1:a kvadranten identifieras...



...och integral ställs upp enligt skivmetoden:

$$V = \pi \int_2^3 y^2 \, dx = \pi \int_2^3 (9 - x^2) \, dx = \dots = \frac{8\pi}{3}$$

b) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer om området roterar runt y-axeln.

Lösningstips:

Samma område som i a) men skalmetoden ger nu:

$$V = 2\pi \int_2^3 x\sqrt{9-x^2}dx = \pi \int_3^2 -2x\sqrt{9-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} u = 9 - x^2 \\ \dfrac{du}{dx} = -2x \\ "du = -2xdx" \end{array} \right|$$

$$= \pi \int_0^5 \sqrt{u}\, du = \cdots = \frac{10\pi\sqrt{5}}{3}$$

3 p

4. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2 & , \ 5 \le x < 8 \\ 0.1 & , \ 8 \le x \le 12 \\ 0 & , \ \text{övriga } x \end{cases}$$

a) Bestäm fördelningsfunktionen till täthetsfunktionen.

Svar:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 5 \\ 0.2x - 1 & , \ 5 \le x < 8 \\ 0.1x - 0.2 & , \ 8 \le x \le 12 \\ 1 & , \ x > 12 \end{cases}$$

b) Beräkna kvantilen $x_{0.8}$ på valfritt sätt.

Lösningstips – exempel på en metod:

Eftersom att

$$\int_5^8 0.1\, dx = \cdots = 0.6$$

måste 80%-kvantilen ligga inom nästa intervall $8 \le x < 12$.

Integralen för ytterligare 20% ställs upp enligt

$$\int_8^b 0.1\, dx = \cdots \underbrace{= 0.2}_{\text{krav}} \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \quad b = 10 = x_{0.8}$$

c) Beräkna kvantilen $x_{0.8}$ på ett annat sätt.

Lösningstips – exempel på en annan metod:

Eftersom att

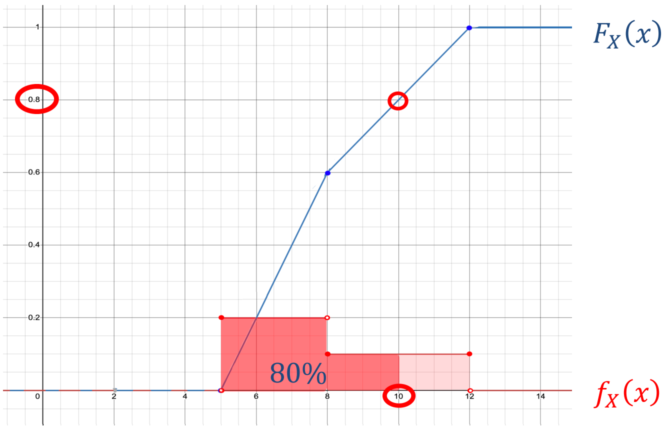
$$F(8) = 0.6$$

måste 80%-kvantilen ligga inom nästa intervall $8 \le x < 12$.

$$F_X(x) = 0.1x - 0.2 \underbrace{= 0.8}_{\text{krav}} \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \quad x = 10 = x_{0.8}$$

Fotnot:

Oavsett vilka metoder man väljer i b) och c) så hittar man motsvarande information hos tillhörande funktionskurvor:



3 p

5.

a) Låt

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

och

$$g(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

Anpassa konstanterna $A - D$ så att $f(x)$ och $g(x)$ och deras derivator blir så lika som möjligt i en omgivning av origo.

Lösningstips:

Successiv derivering med insättning av $x = 0$ ger

$$A = 0\,, \quad B = 1\,, \quad C = -\frac{1}{2} \quad \text{och} \quad D = \frac{1}{3}$$

Så att

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b) Anpassa konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - \cos x^2 + e^x + ax}{\sin x^3}$$

existerar ändligt och beräkna gränsvärdet.

Lösningstips:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\cos x^2+e^x+ax}{\sin x^3}$$

$= |\text{Maclaurinutveckling t.o.m. grad tre med restterm av grad fyra}|$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-1+\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+ax+\mathcal{O}(x^4)}{x^3+\mathcal{O}(x^9)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+ax+\frac{x^3}{2}+\mathcal{O}(x^4)}{x^3+\mathcal{O}(x^9)}=\left|\begin{array}{l}\text{Krav } a=-2 \text{ för}\\ \text{ändligt gränsvärde}\end{array}\right|$$

$$=\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x^6)}=\frac{1}{2}$$

3 p

6.

a) Låt

$$f(x)=\begin{cases}8-2x & , \quad 0\le x\le 2\\ 2x-4 & , \quad 2<x\le 4\end{cases}$$

och visa med ett exempel att *Medelvärdessatsen för integraler* inte får användas ifall funktionen har en diskontinuitet på det aktuella intervallet.

Lösningstips:
Integralen $\int_1^3 f(x)dx=\cdots=6$ ger med hjälp av Medelvärdessatsen för integraler $f(\xi)\cdot 2=6$ som kräver att $f(\xi)=3$ men inom detta intervall antar aldrig funktionen $y=3$ – alltså gäller ej satsen för denna funktion.

Fotnot:
Notera att om man väljer att integrera över hela intervallet enligt $\int_0^4 f(x)\,dx$ så uppstår inte avsaknaden av passande $f(\xi)$ ty funktionsvärdet $f(\xi)=4$ finns då på två ställen inom det aktuella intervallet. Man tvingas därmed att välja ett snävare intervall runt diskontinuiteten i $x=2$ för att ovanstående avsaknad av passande $f(\xi)$ skall uppkomma.

b) Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} e^{t^2}\, dt$$

Lösningstips:
Se slutet av beviset av Analysens huvudsats sid 286. Man utnyttjar medelvärdessatsen för integraler på den kontinuerliga funktionen $f(t) = e^{t^2}$, med ett ξ inom intervallet $[x,\ x+h]$ och får

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} e^{t^2}\, dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} e^{\xi^2}(x+h-x) = \lim_{h\to 0} e^{\xi^2}$$

och tack vare att $\xi \to x$ då $h \to 0$ får man svaret (gränsvärdet) e^{x^2}.

3 p

7. Låt

$$(1+x)^2 \frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \ln x$$

och bestäm alla lösningskurvor som passerar punkten $(1, 0)$.

Lösningstips:
Man ser inledningsvis att $x > 0$ och $y \geq 0$. Som synes en ickelinjär differentialekvation av första ordningen och löses därmed genom separation av variablerna till

$$\frac{1}{\sqrt{y}} dy = \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx \ , \ \ y > 0$$

$y = 0$ (vilket är tillåtet från början) måste kontrolleras för sig och man finner en triviallösning $y = 0$.
Genom att integrera ledvis

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int \overbrace{\frac{1}{(1+x)^2}}^{\uparrow} \underbrace{\ln x}_{\downarrow} \, dx$$

får man under partiell integration

$$2\sqrt{y} = \left(-\frac{1}{1+x}\right) \ln x - \int -\frac{1}{(1+x)x} dx$$

som efter partialbråksuppdelning kan skrivas enligt

$$2\sqrt{y} = \left(-\frac{1}{1+x}\right) \ln x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} +\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{y} = \left(-\frac{1}{1+x}\right)\ln x + \ln x - \ln(1+x) + C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{y} = -\frac{1}{1+x}\ln x + \ln\frac{x}{1+x} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + C\right)^2$$

Insättning av punkten $(1, 0)$ ger $C = \ln 2$ så att lösningen blir

$$y = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + \ln 2\right)^2$$

samt den tidigare nämnda triviallösningen

$$y = 0$$

som också passerar punkten $(1, 0)$.

3 p