Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Kompletterande tentamen för kursen VT2024

Examination:	Modul TEN 1 inom utbildning TNIU23
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall
Jour:	Peter Holgersson via telefon 0705-19 99 92
Skrivtid:	2024-06-05 klockan 14:00-19:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Låt

$$y'' - y = 9e^{2x} - 3x^2$$

Bestäm den lösning som uppfyller begynnelsevillkoren $y'(0) = 6$ och $y(0) = 15$.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen $y'' - y = 0$ löses och man får $y_h = Ae^x + Be^{-x}$.

Därmed fungerar ansatsen $y_p = Ce^{2x} + Dx^2 + Ex + F$ med tillhörande andraderivata $y_p'' = 4Ce^{2x} + 2D$ och insättning av y_p och y_p'' i ekvationen ger partikulärlösningen $y_p = 3e^{2x} + 3x^2 + 6$.

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = Ae^x + Be^{-x} + 3e^{2x} + 3x^2 + 6$$

med derivatan

$$y' = Ae^x - Be^{-x} + 6e^{2x} + 6x$$

Med hänsyn till villkoren får man $\begin{cases} A + B + 3 + 6 = 15 \\ A - B + 6 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 3 \end{cases}$ så att den sökta lösningen blir

$$y = 3e^x + 3e^{-x} + 3e^{2x} + 3x^2 + 6$$

(3 p)

2. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då det begränsade området mellan kurvan $y = \sqrt{9-x}$ och de räta linjerna $y = 0$ och $x = 0$ roterar ett varv runt y-axeln.

Lösningstips:

Skärningspunkterna (0, 3) och (9, 0) bestäms och volymen beräknas exempelvis skivmetoden enligt

$$V = \int_0^3 \pi x^2\, dy = \pi \int_0^3 (9-y^2)^2\, dy = \pi \int_0^3 (81 - 18y^2 + y^4)\, dy$$

$$= \pi \left[81y - 6y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_0^3 = \cdots = \frac{648\pi}{5} \quad \text{v. e.}$$

Eller med rörmetoden (skalmetoden):

$$V = \int_0^9 2\pi x\left(\sqrt{9-x}\right) dx = \left| \begin{array}{c} u = 9-x \\ x = 9-u \\ \dfrac{du}{dx} = -1 \\ \text{"}du = -dx\text{"} \\ x = 0 \implies u = 9 \\ x = 9 \implies u = 0 \end{array} \right|$$

$$= -2\pi \int_9^0 (9-u)\sqrt{u}\, du = 2\pi \int_0^9 \left(9u^{1/2} - u^{3/2}\right) dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{9u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} \right]_0^9 = 2\pi \left[6u\sqrt{u} - \frac{2u^2\sqrt{u}}{5} \right]_0^9 = \cdots = \frac{648\pi}{5} \quad \text{v. e.}$$

(3 p)

3. Låt $f_X(x)$ vara en täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{8} & 4 \le x \le 8 \\ 0 & \text{övriga } x \end{cases}$$

a) Bestäm fördelningsfunktionen.

Lösningstips:

För fördelningsfunktioner $F_X(x)$ gäller enligt sats att de är växande samt att

$$F_X(x) \to 1 \text{ då } x \to \infty$$

och

$$F_X(x) \to 0 \text{ då } x \to -\infty$$

I detta fall gäller att då $x \in [4, 8]$ är

$$F_X(x) = x - \frac{x^2}{16} + C$$

C anpassas så att

$$F(8) = 8 - \frac{8^2}{16} + C = |\text{enligt krav}| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -3$$

$$F(4) = 4 - \frac{4^2}{16} + C = |\text{enligt krav}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -3$$

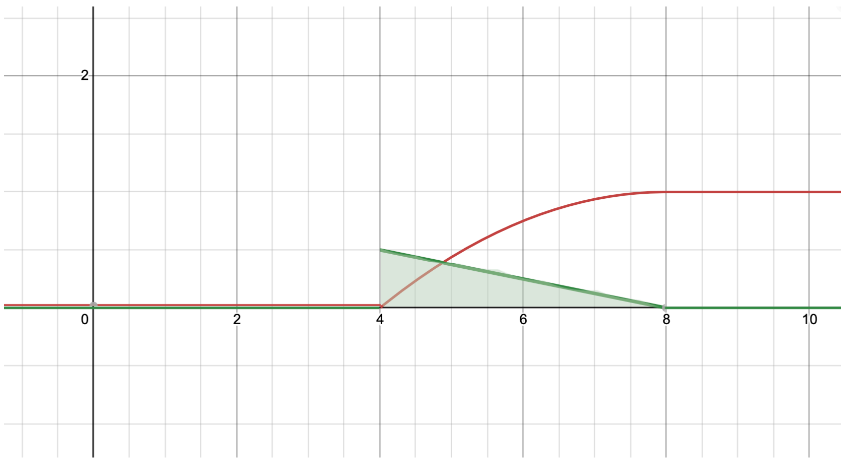
så att

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 4 \\ x - \frac{x^2}{16} - 3 & , \quad 4 \le x \le 8 \\ 1 & , \quad x > 8 \end{cases}$$

b) Skissa kurvor för täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i samma koordinatsystem.

Lösningstips:

Värdetabeller ger:

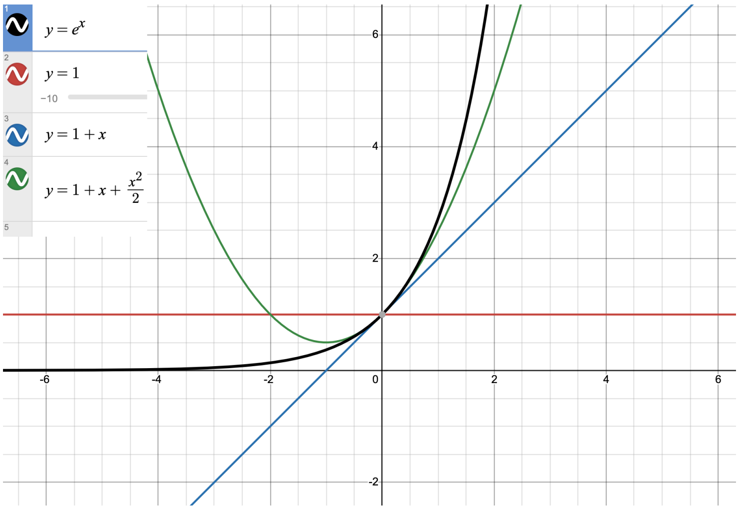


(3 p)

4. Skissa i ett *gemensamt* koordinatsystem, i en omgivning till $x = 0$, kurvan $y = f(x) = e^x$ samt de tre kurvorna till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 0, 1 och 2.

Lösningstips:

Kurvor tillhörande Maclaurin-polynomen $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$ och $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $f(x) = e^x$ skissas tydligt med hjälp av värdetabeller så att man tydligt ser att $p_2(x)$ approximerar $f(x)$ bättre än vad $p_1(x)$ gör, och så vidare, i en omgivning till $x = 0$:



(3 p)

5. Lös differentialekvationen

$$\frac{y'}{\tan x} - y = \frac{1}{\sin x}$$

Lösningstips:

Ekvationen skriven på normalform

$$y' - (\tan x)y = \tan x \frac{1}{\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad y' - (\tan x)y = \frac{1}{\cos x}$$

och en integrerande faktor tas fram

$$e^{\int(-\tan x)dx} = e^{\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx} = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x|$$

Faktorn $\cos x$ duger och man får:

$$y' \cos x - y \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(y \cos x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y \cos x = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x + C}{\cos x}$$

(3 p)

6. Integralen

$$\int_1^e \ln x\, dx$$

skall ersättas med en motsvarande produkt $f(\xi)(b-a)$ enligt Medelvärdessatsen för integraler.

a) Beräkna värdet ξ.

Lösning:

Integralen löses:

$$\int_1^e \ln x\, dx = \int_1^e 1 \ln x\, dx = |\mathrm{PI}| = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = 1$$

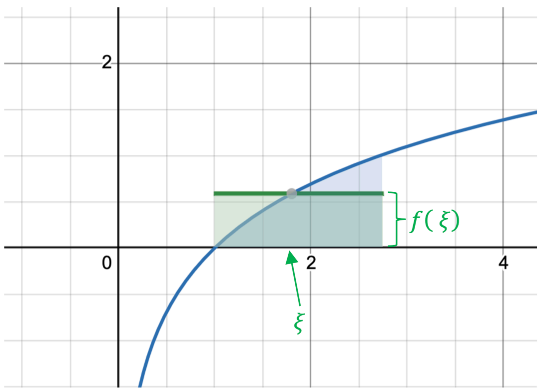
Satsen används:

$$\int_1^e \ln x\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{array} \right| = f(\xi)(b-a)$$

$$= \ln \xi \cdot (e-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln \xi = \frac{1}{e-1} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = e^{1/(e-1)} \approx 1{,}8$$

b) Beskriv detta med en förklarande skiss.

Svar:



$$\int_1^e \ln x\, dx = \text{blå yta} = \text{grön yta} = f(\xi)(e-1)$$

(3 p)

7. Antag att f är kontinuerlig på ett intervall I samt att a och x tillhör detta intervall.

a) Bevisa med hjälp av bland annat derivatans definition att

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Lösningstips:

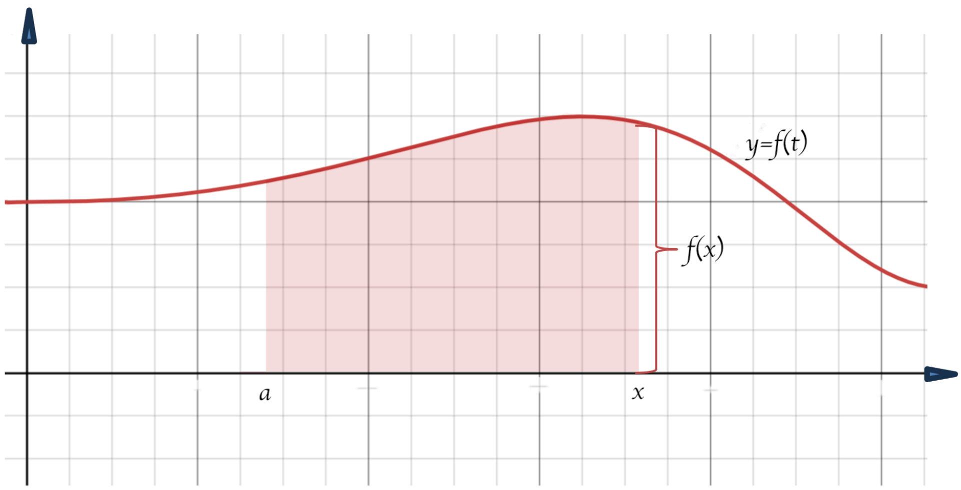
Beviset av Analysens huvudsats finns under Sats 6.7 på sid 286 i läroboken samt i föreläsningsanteckningarna.

b) Förklara med en skiss och egna ord vad likheten i a) i praktiken berättar.

Lösningstips:

Se kommentarer om Analysens Huvudsats från föreläsningen.

Likheten berättar att integralen $\int_a^x f(t)\,dt$ (röd skugga nedan) har en tillväxt (en så kallad marginalökning $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$) – när man ändrar den högra integrationsgränsen x i positiv riktning – som är lika stor som funktionsvärdet $f(x)$ i just gränsen x:



(3 p)