Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Kompletterande tentamen för kursen VT2024

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid:	2024-08-31 klockan 08:00-13:00
Jour:	Peter Holgersson via telefon 0705-19 99 92
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Bestäm den enda lösningen till differentialekvationen

$$y'' - y = 9e^{2x} - 3x^2$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y'(0) = 6$ och $y(0) = 15$.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' - y = 0$$

löses och man får

$$y_h = Ae^{x} + Be^{-x}$$

Därmed fungerar ansatsen

$$y_p = Ce^{2x} + Dx^2 + Ex + F$$

med tillhörande andraderivata

$$y_p'' = 4Ce^{2x} + 2D$$

och insättning av y_p och y_p'' i ekvationen ger partikulärlösningen

$$y_p = 3e^{2x} + 3x^2 + 6$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = Ae^{x} + Be^{-x} + 3e^{2x} + 3x^2 + 6$$

med derivatan

$$y' = Ae^{x} - Be^{-x} + 6e^{2x} + 6x$$

Insättning av villkoren ger

$$\begin{cases} A + B + 3 + 6 = 15 \\ A - B + 6 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 3 \end{cases}$$

så att den sökta lösningen blir

$$y = 3e^{x} + 3e^{-x} + 3e^{2x} + 3x^2 + 6$$

3 p

2. Låt $f_X(x)$ vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{5} & , \quad 0 \leq x < 5 \\ 0 & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

a) Visa att väntevärdet och medianen sammanfaller för denna funktion.

Lösningstips:

Medianen $x_{0,5}$ fås genom anpassning av b enligt.

$$\int_0^b \frac{1}{5}\,dx = \left[\frac{x}{5}\right]_0^b = \frac{b}{5} \overbrace{= 0{,}5}^{\text{krav för median}} \quad \Leftrightarrow \quad b = 2{,}5$$

Väntevärdet μ fås genom

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_0^5 \frac{x}{5}\,dx = \left[\frac{x^2}{10}\right]_0^5 = \frac{25}{10} = 2{,}5$$

Därmed gäller att medianen $= x_{0,5} = 2{,}5 = \mu =$ vänteärdet.

b) Nämn tre egenskaper hos en fördelningsfunktion.

Lösningstips:

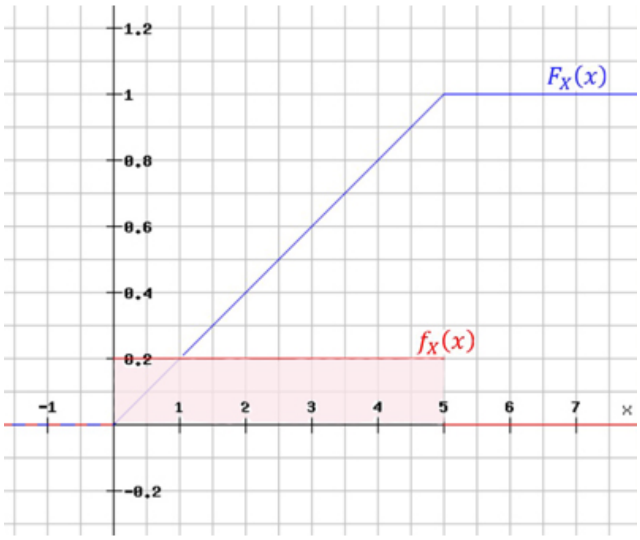
Tre valfria egenskaper väljs utifrån följande definition:

”En fördelningsfunktion $F_X(x)$ är den primitiva funktionen till täthetsfunktion $f_X(x)$, sådan att följande fyra egenskaper är uppfyllda”:

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $F_X(x)$ är växande
- $F_X(x)$ är åtminstone högerkontinuerlig

c) Skissa täthetsfunktionen $f_X(x)$ och tillhörande fördelningsfunktion $F_X(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar:



3 p

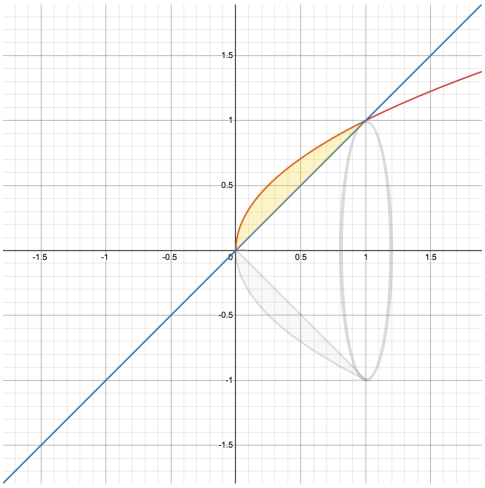
3. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då det begränsade området mellan $y = \sqrt{x}$ och $y = x$ roterar…

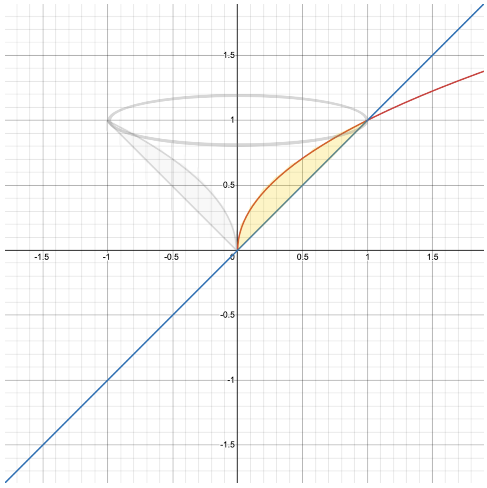
a) …ett varv runt x –axeln.

b) …ett varv runt y –axeln.

Lösningstips:

Området identifieras och skärningspunkterna är origo och $(1, 1)$. Skisser av rotationskropparna kan nu skapas:





I uppgift a) ger exempelvis skivmetoden ger runt x-axeln

$$V = V_{yttre} - V_{inre} = \underbrace{\int_0^1 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx}_{\text{"ägghalva"}} - \underbrace{\int_0^1 \pi x^2 dx}_{\text{kon}} = \cdots = \frac{\pi}{6} \quad \text{volymenheter}$$

I uppgift b) ger exempelvis skalmetoden (= rörmetoden) runt y-axeln

$$V = \int_0^1 \underbrace{2\pi x}_{\substack{\text{om-}\\\text{krets}}} \underbrace{\left(\sqrt{x} - x\right)}_{\substack{\text{höjden}\\\text{tak minus}\\\text{golv}}} dx = \cdots = \frac{2\pi}{15} \quad \text{volymenheter}$$

3 p

4. Om integraler

a) Förklara med egna ord och tydlig figur vad *medelvärdessatsen för integraler* berättar.

Lösningstips:

Se sats 6.5 i läroboken.

Satsen anger *att för en kontinuerlig funktion* $f(x)$ på ett *kompakt intervall* $x \in [a, b]$ gäller att en bestämd integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

har samma värde som produkten av *funktionsvärde "medelvärde" på det aktuella intervallet* kallat $f(\xi)$ och *intervallets bredd* $(b-a)$. Detta "lagom höga" funktionsvärde $f(\xi)$ återfinns i minst en punkt $x=\xi$ inom det aktuella intervallet. Alltså

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

b) Visa att

$$2 \leq \int_0^3 2^{x/3}\,dx \leq 7$$

Lösningstips:

Funktionen $f(x) = 2^x$ är strängt växande vilket gör att funktionens största värde på aktuellt intervall är $f_{max} = f(3) = 2$ och funktionens minsta värde är $f_{min} = f(0) = 1$.

Därmed gäller (med integrationsgränserna $a = 0$ och $b = 2$) att

$$\int_0^3 2^{x/2}\,dx < f_{max}(b-a) = 2 \cdot 3 = 6$$

vilket är en enkel översumma. Vidare gäller

$$\int_0^3 2^{x/2}\,dx > f_{min}(b-a) = 1 \cdot 3 = 3$$

vilket är en enkel undersumma. Översumman och undersumman stänger per definition in integralens värde:

$$3 \leq \int_0^3 2^{x/2}\,dx \leq 6$$

Och därmed uppfylls olikheten ovan med god marginal.

3 p

5. Låt

$$y = \sin x$$

a) Bestäm tillhörande Taylor-polynom av grad 2 i en omgivning av $x = \frac{\pi}{2}$.

Lösningstips:

Taylors formel ger i en omgivning till $x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin x = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^0}{0!} + \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^1}{1!} - \sin\frac{\pi}{2}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \cdots$$

$$= 1 + 0 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cdots$$

så att Taylor-polynom av grad 2 för $y = \sin x$ blir

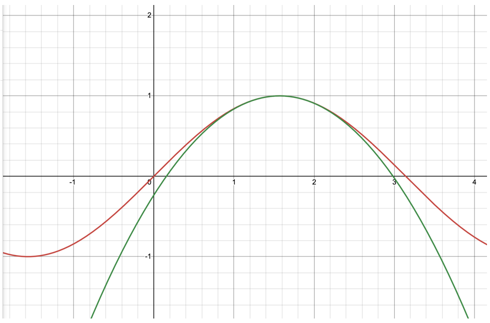
$$y = 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}$$

b) Skissa kurvan

$$y = \sin x$$

tillsammans med kurvan för tillhörande Taylor-polynom av grad 2, i en omgivning av $x = \frac{\pi}{2}$.

Svar:



c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Lösningstips:

Taylor-polynomet kommer nu till nytta:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \left|\begin{matrix}\text{Taylors}\\ \text{formel}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\left(1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+r(x)\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \cdots = \frac{1}{2}$$

3 p

6. Låt

$$y' = \sqrt{y}$$

a) Lös differentialekvationen

Lösningstips:

Inledningsvis ser man trivilallösningen

$$y = 0$$

Sedan löser man ekvationen för $y \neq 0$:

Differentialekvationen är separabel och variablerna separeras enligt:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$$

Båda leden integreras och man får den allmänna lösningen

$$2\sqrt{y} = x + C$$

Varken y eller $\sqrt{y}$ är negativa (osynligt plus före rottecknet) så vänsterledet och högerledet är icke negativa så att

$$x + C \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -C$$

Löser man ut y får man svaret:

$$y = \frac{(x + C)^2}{4} \quad , \quad x \geq -C$$

Samt triviallösningen

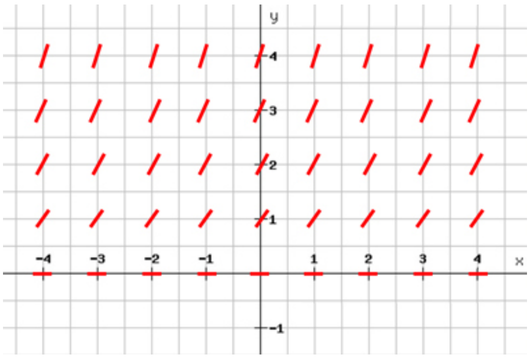
$$y = 0$$

b) Skissa tillhörande riktningsfält i 1:a och 2:a kvadranten nära origo.

Lösningstips:

$$y' = \sqrt{y}$$

Som synes påverkas derivatan y' enbart av $\sqrt{y}$ och inte av x. En värdetabell med utvalda y-värden mellan exempelvis 0 och 4 ger derivator y' mellan 0 och 2 och riktningsfältet för följande utseende:



Riktningsfältet ovan är en samlad bild av alla lösningar (lösningskurvor)

$$y = \frac{(x+C)^2}{4} \quad , \quad x \geq -C$$

för olika värden på C, samt triviallösningen

$$y = 0$$

3 p

7. Ange den enda funktionen som uppfyller integralekvationen

$$y(x) = x^2 + \int_0^x y(t)dt$$

Tips: Derivera ledvis och lös differentialekvationen som uppstår.

Lösningstips:

Ledvis derivering med avseende på x ger:

$$y'(x) = 2x + \frac{d}{dx}\int_0^x y(t)dt$$

Analysens huvudsats ger nu en första ordningens differentialekvation

$$y'(x) - y(x) = 2x$$

som kan lösas med hjälp av integrerande faktor e^{-x} enligt:

$$y'(x)e^{-x} - y(x)e^{-x} = 2xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y(x)e^{-x}\right) = 2xe^{-x}$$

Båda leden integreras (partiell integration i högerledet) och man får:

$$y(x)e^{-x} = \int 2xe^{-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-x} = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{-x} = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{x} - 2x - 2$$

Den ursprungliga ekvationen har ett begynnelsevillkor som gör att C kan bestämmas. Villkoret fås genom att man sätter in $x = 0$ i den ursprungliga ekvationen och nollställer integralen i högerledet så att ett villkor framträder:

$$y(0) = 0^2 + \int_0^0 y(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad y(0) = 0$$

Därmed är den enda lösningen av ekvationen

$$y(x) = 2e^{x} - 2x - 2$$

3 p