Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Ordinarie tentamen för kursen VT2025

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid:	2025-03-21 klockan 14:00-19:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

---

1. Låt

$$y' + y = x$$

a) Lös differentialekvationen med hjälp av integrerande faktor.

Lösningstips:

Med integrerande faktor e^x får man

$$e^x y' + e^x y = e^x x$$

och vänsterledet kan nu skrivas som derivatan av en produkt enligt

$$(e^x y)' = e^x x$$

och efter ledvis integration (partiell integration i högerledet) får man

$$e^x y = e^x x - e^x + C$$

så att den allmänna lösningen blir

$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

b) Lös differentialekvationen med hjälp av y_h och y_p.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y' + y = 0$$

Leder med ansatsen $y_h = Ce^{rx}$ till den karaktäristiska ekvationen med roten $r = -1$ som ger den homogena ekvationens lösning

$$y_h = Ce^{-x}$$

Ansatsen

$$y_p = Ax + B$$

$$y'_p = A$$

ger ekvationssystem med lösningen

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

så att

$$y_p = x - 1$$

och den allmänna lösningen blir

$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

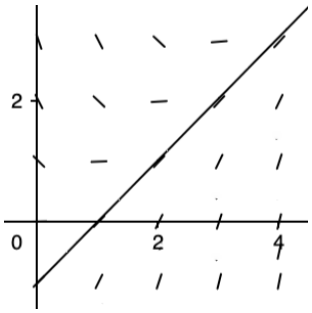
c) Skissa ett riktningsfält till differentialekvationen inom $0 \leq x \leq 4$ och $-1 \leq y \leq 3$ och markera den lösningskurva som bildar en rät linje.

Lösningstips:

Ekvationen skrivs på formen $y' = x - y$ och derivatan beräknas i utvalda punkter för att sedan åskådliggöras med hjälp av korta tangenter till de sökta lösningskurvorna.

x	y	$y' = x - y$
0	-1	1
0	0	0
0	1	-1
0	2	-2
0	3	-3
1	-1	2
o.s.v.	o.s.v.	o.s.v.

Korta tangenter skissas och man anar lösningskurvor – särskilt $y = 2$ syns tydligt då den är en rät linje som övriga lösningskurvor närmar sig då $x \to \infty$



3 p

2. Låt

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x} + 10\cos x$$

a) Lös differentialekvationen

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

löses, t.ex. med ansatsen $y_h = Ce^{rx}$ som leder till den karaktäristiska ekvationen med rötterna $r = 1$ och $r = 2$ som ger den homogena ekvationens lösning

$$y_h = Ae^{x} + Be^{2x}$$

Ansatsen

$$y_p = Ce^{3x} + D\sin x + E\cos x$$

duger för att finna *en* lösning på ekvationen. Insättning av y_p med tillhörande y_p' och y_p'' i ekvationen ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2C = 6 \\ D + 3E = 0 \\ -3D + E = 10 \end{cases}$$

som ger lösningen

$$y_p = 3e^{3x} - 3\sin x + \cos x$$

så att den allmänna lösningen blir

$$y = 3e^{3x} - 3\sin x + \cos x + Ae^{x} + Be^{2x}$$

b) Bestäm den lösning till differentialekvationen som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 1$.

Lösningstips:

$$y = 3e^{3x} - 3\sin x + \cos x + Ae^{x} + Be^{2x}$$

med tillhörande derivata

$$y' = 9e^{3x} - 3\cos x - \sin x + Ae^{x} + 2Be^{2x}$$

ger med villkoren ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4 + A + B = 1 \\ 6 + A + 2B = 1 \end{cases}$$

med lösningen

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \end{cases}$$

så att den sökta lösningskurvan i riktningsfältet är

$$y = 3e^{3x} - 3\sin x + \cos x - e^{x} - 2e^{2x}$$

3 p

3. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 - \frac{x}{2} & , \quad 2 \le x \le 4 \\ 0 & , \quad \text{övriga } x \end{cases}$$

vara en täthetsfunktion för den stokastiska variabeln X.

a) Bestäm den tillhörande fördelningsfunktionen.

Lösningstips:

Fördelningsfunktionen till vår täthetsfunktion är den primitiva funktion $F_X(x) = 2x - \frac{x^2}{4} + C$ som uppfyller kraven

$$F_X(2) = 0$$

och

$$F_X(4) = 1$$

v kräver att $C = -3$ så att

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 2 \\ 2x - \frac{x^2}{4} - 3 & , \quad 2 \le x \le 4 \\ 1 & , \quad x > 4 \end{cases}$$

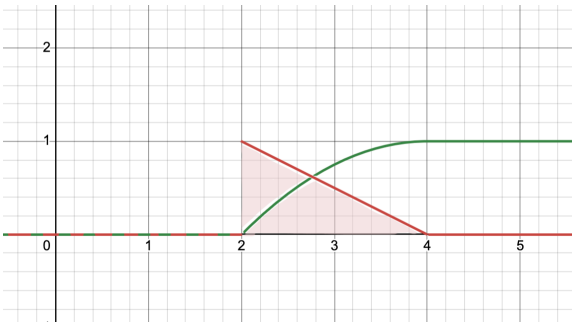
b) Beräkna den övre kvartilen.

Lösningstips:

$$F_X(x) = 2x - \frac{x^2}{4} - 3 = \frac{4}{4} \quad \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x_{0.75} = 3$$

c) Rita kurvor för täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar:



3 p

4. Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{(e^{2x}-1)\sin x^3}$$

Lösningstips:

Maclaurin-utveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{(e^{2x}-1)\sin x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^4}{2}+O(x^8)\right)}{\left(1+2x+\frac{4x^2}{2}+O(x^3)-1\right)\left(x^3-O(x^9)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2}+O(x^8)}{2x^4+O(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+O(x^4)}{2+O(x)}=\frac{1}{4}$$

Även standardgränsvärden ger en smidig lösning…

b)

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x+5}^{x+7}\left(3+\frac{\sin t}{t}\right)dt$$

Lösningstips:

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x+5}^{x+7}\left(3+\frac{\sin t}{t}\right)dt=\left|\begin{array}{l}\text{Medelvärdessatsen}\\ \text{för integraler med}\\ x+5\le\xi\le x+7\\ \text{ty kontinuerlig på}\\ \text{kompakt internall}\end{array}\right|$$

$$= \lim_{\xi \to \infty} \left(3 + \frac{\overbrace{\sin \xi}^{\text{begr}}}{\xi} \right) \big((a+7) - (a+5) \big) = 3 \cdot 2 = 6$$

3 p

5. Visa att

$$4.3 \leq \int_0^4 1.2^{x/2} dx \leq 5.3$$

Lösningstips:

Funktionen är strängt växande.

Övertrappa med *två* delintervall ger summan

$$f(2) \cdot (2-0) + f(4) \cdot (4-2) + 1.2^1 \cdot 2 + 1.2^2 \cdot 2 = 2.4 + 2.88 = 5.28$$

Undertrappa med *två* delintervall ger summan

$$f(0) \cdot (2-0) + f(2) \cdot (4-2) + 1.2^0 \cdot 2 + 1.2^1 \cdot 2 = 2 + 2.4 = 4.4$$

Därmed gäller att

$$4.3 < 4.4 = \text{undersumman} \leq \int_0^4 1.2^{x/2} dx \leq \text{översumman} = 5.28 < 5.3$$

och integralens möjliga värde ligger innanför det angivna intervallet.

3 p

6. Ett klot har volymen

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

a) Visa detta med hjälp av en integral som beskriver en rotationskropp enligt skivmetoden runt x-axeln.

Lösningstips:

Det begränsade området mellan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ och x-axeln roterar runt x-axeln.

En skiva:

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx$$

Hela rotationskroppen:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \cdots = \frac{4\pi r^3}{3}$$

b) Visa detta med hjälp av en integral som beskriver en rotationskropp enligt rörmetoden runt y-axeln.

Lösningstips:

Det begränsade området mellan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ och x-axeln roterar runt y-axeln och bildar det övre halvklotet.

Ett rör:

$$dV = 2\pi x\, y\, dx = 2\pi x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Halva (övre) rotationskroppen:

$$V = 2\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = -\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, (-2x)\, dx$$

$$= \left| \begin{matrix} u = r^2 - x^2 \\ \dfrac{du}{dx} = -2x \\ "du = -2x\, dx" \end{matrix} \right| = -\pi \int_{r^2}^0 \sqrt{u}\, du = \pi \int_0^{r^2} \sqrt{u}\, du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{r^2}$$

$$= \left[\frac{2u\sqrt{u}}{3} \right]_0^{r^2} = \cdots = \frac{2\pi r^3}{3}$$

Hela (övre) rotationskroppen:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

3 p

7. Bestäm den enda lösningen till differentialekvationen

$$3(1 + x^2)y' - 6xy = (1 + x^2)^2\, 3 \arctan x$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

Ledning

Detta är uppgift 8.13 i övningshäftet. Ekvationen skrivs på normalform.

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2}\, y = (1 + x^2) \arctan x$$

Ekvationen förenklas sedan med hjälp av den integrerande faktor $\frac{1}{1+x^2}$ och man får

$$\frac{y'}{1 + x^2} - \frac{2x}{(1 + x^2)^2} y = \arctan x$$

och vänsterledet (som vanligt med hjälp av integrerande faktor) är nu derivatan av en produkt enligt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}y\right) = \arctan x$$

Integration av båda leden (partiell integration med en etta i högerledet) ger

$$\frac{y}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\Leftrightarrow y = (1+x^2)\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 1\right)$$

och med hänsyn till villkoret $y(0) = 1$ får man $C = 1$ så att

$$y = (1+x^2)\left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 1\right)$$

3 p