

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Kompletterande tentamen för kursen VT2025

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid:	2025-06-11 klockan 14:00-19:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1.

a) Lös differentialekvationen

$$y' + y = x$$

Lösningstips:

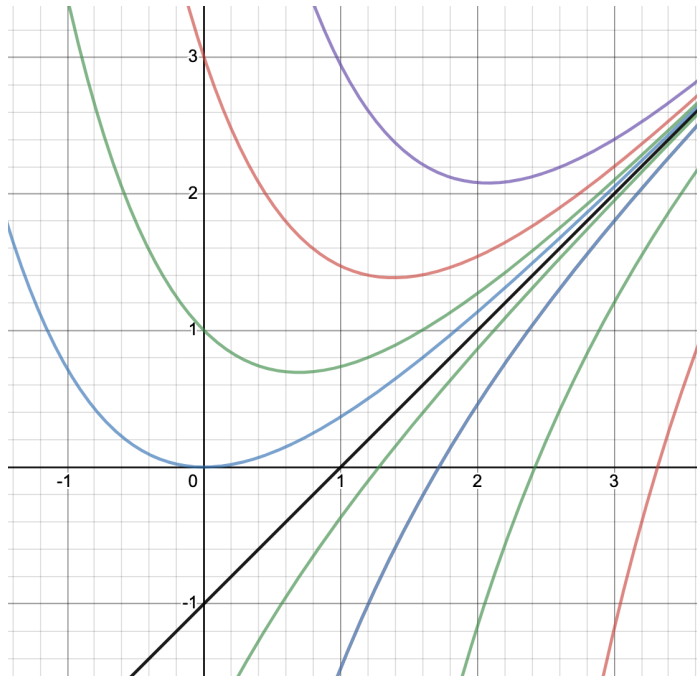
Exempelvis integrerande faktor ger den allmänna lösningen

$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

b) Skissa tillhörande riktningsfält inom $-1 \leq x \leq 3$ och $-1 \leq y \leq 3$.

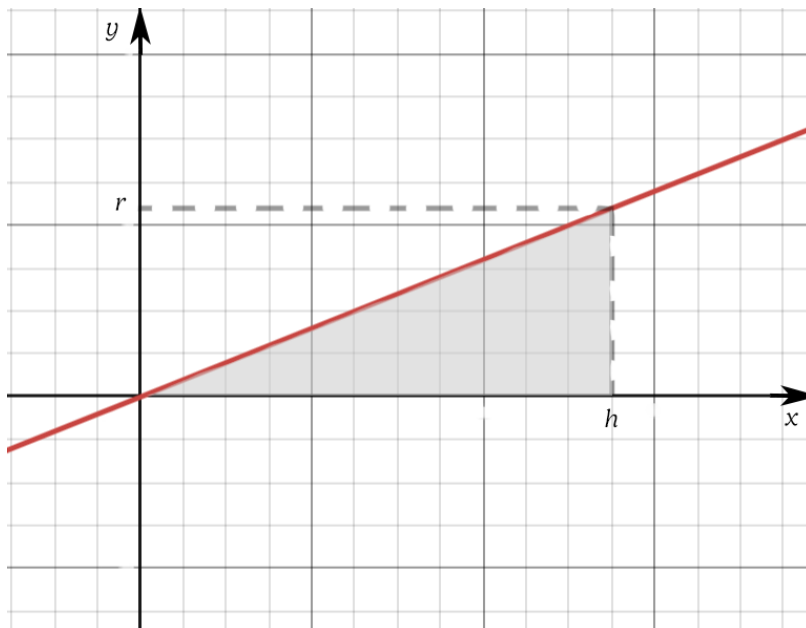
Lösningstips:

Värdetabell med x , y och y' inom angivna intervall ger följande fält med en rätlinjig lösningskurva $y = x - 1$ vilka övriga lösningskurvor närmar sig då $x \rightarrow \infty$:



3 p

2. Beräkna med hjälp av en integral volymen av den rotationskropp som uppkommer då det skuggade området nedan – mellan den räta linjen, linjen $x = h$ och x -axeln – roterar ett varv runt x -axeln.



Lösningstips:

Volymen beräknas med skivmetoden enligt

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi y^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx \\ &= \dots = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ v. e.} \end{aligned}$$

vilket stämmer för volymen av en rak cirkulär kon med radien r och höjden h .

3 p

3. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi(1+x^2)} & \text{då } -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ 0 & \text{övriga } x \end{cases}$$

a) Visa att $f_X(x)$ är en täthetsfunktion.

Lösningstips:

Två krav att uppfylla:

- I) Definitionen av en täthetsfunktion kräver att $f_X(x) \geq 0$ och det uppfyller $f_X(x)$.
- II) Definitionen av en täthetsfunktion kräver att $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ och det uppfyller funktionen enligt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{3}{2\pi(1+x^2)} dx = \frac{3}{2\pi} [\arctan x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 1 \end{aligned}$$

b) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion.

Lösningstips:

För fördelningsfunktioner gäller enligt sats att de är växande samt att

$$F(x) \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow \infty$$

och

$$F(x) \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow -\infty$$

I detta fall gäller att då $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ är

$$F(x) = \frac{3}{2\pi} \arctan x + C$$

C anpassas så att

$$F(\sqrt{3}) = \frac{3}{2\pi} \arctan \sqrt{3} + C = \frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 1$$

$$F(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2\pi} \arctan(-\sqrt{3}) + C = -\frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 0$$

Därmed inses att $C = \frac{1}{2}$

$$\text{Svar: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\sqrt{3} \\ \frac{3}{2\pi} \arctan x + \frac{1}{2}, & -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ 1, & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

c) Beräkna den övre kvartilen.

Lösningstips:

Definitionen av övre kvartil $x_{0.75}$ ger i detta fall

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f(x) dx &= \frac{3}{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^b \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3}{2\pi} [\arctan x]_{-\sqrt{3}}^b \\ &= \frac{3}{2\pi} \left(\arctan b - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = |\text{krav}| = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Som visar att $\arctan b = \frac{\pi}{6}$ och därmed att $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Svar: } x_{0.75} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,57$$

3 p

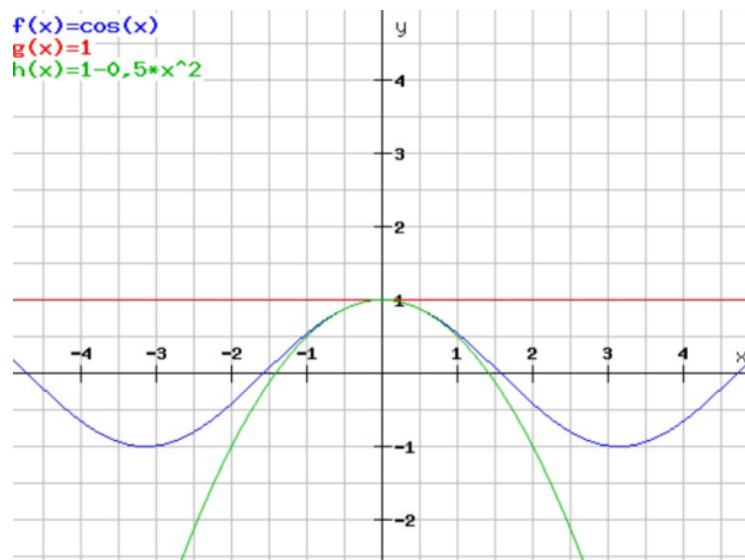
4. Maclaurin-polynom

a) I en omgivning till $x = 0$:

Skissa kurvan till $y = \cos x$ samt kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 0 och grad 2 i ett *gemensamt* koordinatsystem.

Lösningstips:

Kurvor tillhörande Maclaurinpolynomen $p_0(x) = 1$ och $p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $y = \cos x$ skissas och man ser att $p_2(x)$ bättre approximerar $y = \cos x$ än vad $p_0(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$.



b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin x^2}{x(1 - \cos x)}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin x^2}{x(1 - \cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) - 1\right)(x^2 - O(x^6))}{x \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + O(x^4)}{\frac{x^3}{2} + O(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + O(x))}{\frac{1}{2} + O(x)} = 2
 \end{aligned}$$

Även standardgränsvärde ger en smidig lösning...

Svar: 2

3 p

5. Lös differentialekvationen

$$y'' + y = 25xe^{2x}$$

Lösningstips:

Inledningsvis löser man den homogena ekvationen

$$y'' + y = 0$$

med hjälp av dess karakteristiska ekvation

$$r^2 + 1 = 0$$

som har lösningarna

$$r = \pm i$$

Den homogena ekvationens lösningar blir

$$y_h = A_1 e^{ix} + A_2 e^{-ix}$$

Som med hjälp av Eulers 1:a formel kan skrivas om till

$$y_h = A \cos x + B \sin x$$

Notera att y_h inte löser den ordinarie ekvationen men y_h som ger högerledet noll kompletterar y_p (som nu skall bestämmas) så att de tillsammans bildar den allmänna lösningen.

Ansats väljs till $y_p = z(x)e^{2x}$ med $z(x) = Cx + D$ eller direkt enligt

$$y_p = (Cx + D)e^{2x}$$

Ansatsen är baserad på båda ledens utseende.

Insättning av y_p och y_p'' i ekvationen ger efter beräkningar

$$C = 5 \text{ och } D = -4$$

och därmed partikulärlösningen

$$y_p = (5x - 4)e^{2x}$$

Den allmänna lösningen blir

$$y = y_p + y_h = (5x - 4)e^{2x} + A \cos x + B \sin x$$

6. Integralen

$$\int_{-1}^1 e^x dx$$

skall ersättas med en motsvarande produkt $f(\xi)(b-a)$ enligt Medelvärdessatsen för integraler.

a) Beräkna värdet ξ .

Lösning:

Integralen löses:

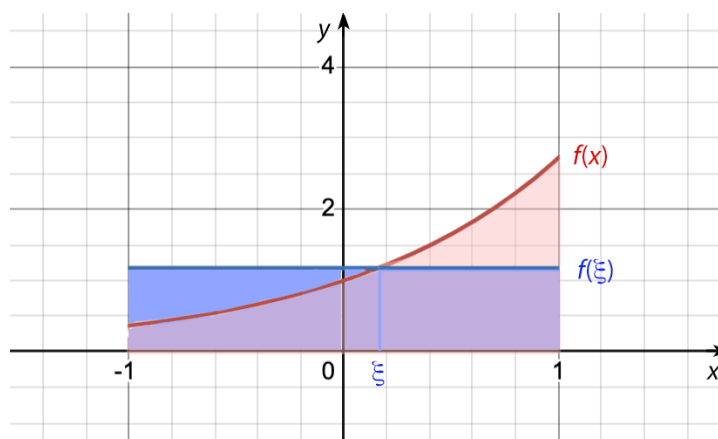
$$\int_{-1}^1 e^x dx = \dots = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

Satsen används:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \left| \begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{array} \right| = f(\xi)(b-a) \\ &= e^\xi \cdot 2 = \frac{e^2 - 1}{e} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^2 - 1}{2e} \Leftrightarrow \xi = \ln \frac{e^2 - 1}{2e} \quad (\approx 0,16) \end{aligned}$$

b) Beskriv detta med en förklarande skiss.

Svar:



$$\int_{-1}^1 e^x dx = \text{röd yta} = \text{blå yta} = f(\xi)(1 - (-1))$$

7. Beräkna på två olika sätt:

$$\frac{d}{dx} \int_x^\pi \cos t^2 dt$$

Metod 1: Med hjälp av bl.a. medelvärdessatsen för integraler

Metod 2: Annan valfri metod.

Lösningstips:

För att underlätta skrivs integralen om enligt:

$$\frac{d}{dx} \left(- \int_\pi^x \cos t^2 dt \right)$$

Metod 1)

Låt

$$S(x) = \int_\pi^x -\cos t^2 dt$$

$$S'(x) = \left| \begin{array}{l} \text{Derivatans} \\ \text{definition} \end{array} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (S(x+h) - S(x))$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_\pi^{x+h} -\cos t^2 dt - \int_\pi^x -\cos t^2 dt \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Enligt} \\ \text{sats} \end{array} \right|$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} -\cos t^2 dt = \left| \begin{array}{l} \text{Medelvärdes-} \\ \text{satsen för} \\ \text{integraler} \end{array} \right|$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (-\cos \xi^2)(x+h-x) = \left| \begin{array}{l} \xi \text{ instängt} \\ \text{mellan} \\ x \text{ och } x+h \end{array} \right|$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow x}} (-\cos \xi^2) = -\cos x^2$$

Metod 2)

Förutsättningarna för Analysens huvudsats (eller Krzysztofs formel) är uppfyllda och därmed ger satsen/formeln svaret $-\cos x^2$.