Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Kompletterande tentamen för kursen VT2025

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid:	2025-06-11 klockan 14:00-19:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1.

a) Lös differentialekvationen

$$y' + y = x$$

Lösningstips:

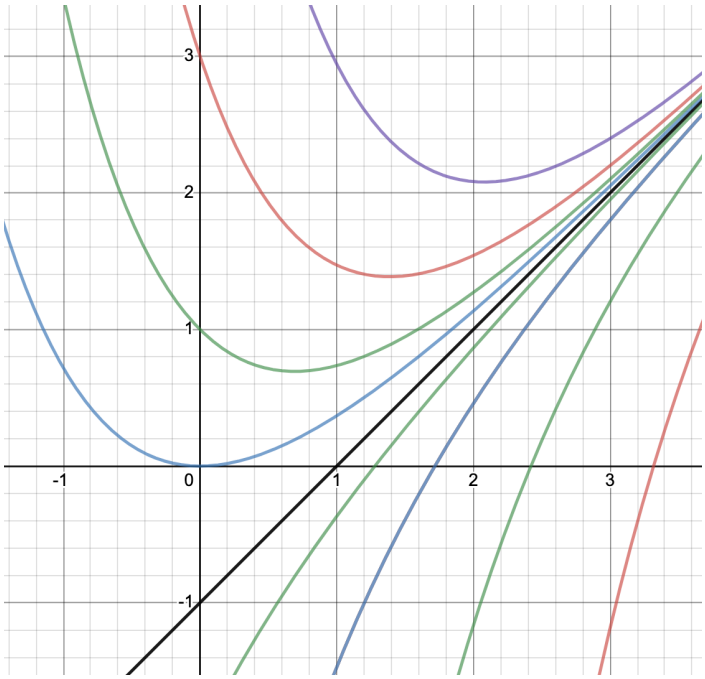
Exempelvis integrerande faktor ger den allmänna lösningen

$$y = x - 1 + Ce^{-x}$$

b) Skissa tillhörande riktningsfält inom $-1 \leq x \leq 3$ och $-1 \leq y \leq 3$.

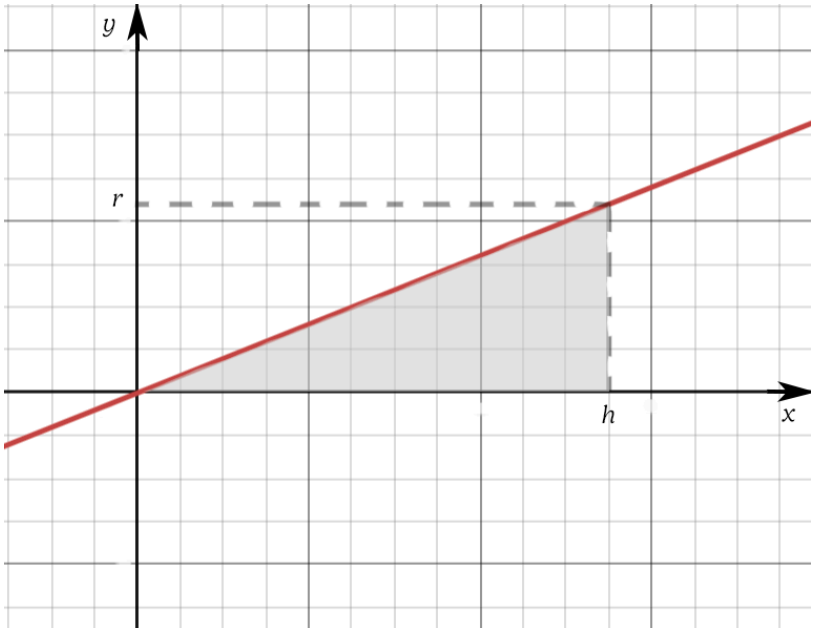
Lösningstips:

Värdetabell med x, y och y' inom angivna intervall ger följande fält med en rätlinjig lösningskurva $y = x - 1$ vilka övriga lösningskurvor närmar sig då $x \to \infty$:



3 p

2. Beräkna med hjälp av en integral volymen av den rotationskropp som uppkommer då det skuggade området nedan – mellan den räta linjen, linjen $x = h$ och x-axeln – roterar ett varv runt x-axeln.



Lösningstips:

Volymen beräknas med skivmetoden enligt

$$V = \int_0^h \pi y^2\,dx = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^3 x^2\,dx$$

$$= \cdots = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ v. e.}$$

vilket stämmer för volymen av en rak cirkulär kon med radien r och höjden h.

3 p

3. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\pi(1+x^2)} & \text{då } -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \\ 0 & \text{övriga } x \end{cases}$$

a) Visa att $f_X(x)$ är en täthetsfunktion.

Lösningstips:

Två krav att uppfylla:

I) Definitionen av en täthetsfunktion kräver att $f_X(x) \ge 0$ och det uppfyller $f_X(x)$.

II) Definitionen av en täthetsfunktion kräver att $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ och det uppfyller funktionen enligt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{3}{2\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{3}{2\pi}[\arctan x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1$$

b) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion.

Lösningstips:

För fördelningsfunktioner gäller enligt sats att de är växande samt att

$$F(x) \to 1 \text{ då } x \to \infty$$

och

$$F(x) \to 0 \text{ då } x \to -\infty$$

I detta fall gäller att då $x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ är

$$F(x) = \frac{3}{2\pi}\arctan x + C$$

C anpassas så att

$$F(\sqrt{3}) = \frac{3}{2\pi}\arctan\sqrt{3} + C = \frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 1$$

$$F(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2\pi}\arctan(-\sqrt{3}) + C = -\frac{1}{2} + C = |\text{krav}| = 0$$

Därmed inses att $C = \frac{1}{2}$

$$\text{Svar: } F(x) = \begin{cases} 0\ , & x < -\sqrt{3} \\ \frac{3}{2\pi}\arctan x + \frac{1}{2}\ , & -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \\ 1\ , & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

c) Beräkna den övre kvartilen.

Lösningstips:

Definitionen av övre kvartil $x_{0.75}$ ger i detta fall

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \frac{3}{2\pi}\int_{-\sqrt{3}}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3}{2\pi}[\arctan x]_{-\sqrt{3}}^{b}$$

$$= \frac{3}{2\pi}\left(\arctan b - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = |\text{krav}| = \frac{3}{4}$$

Som visar at $\arctan b = \frac{\pi}{6}$ och därmed att $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{Svar: } x_{0.75} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}57$$

3 p

4. Maclaurin-polynom

a) I en omgivning till $x = 0$:
Skissa kurvan till $y = \cos x$ samt kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 0 och grad 2 i ett *gemensamt* koordinatsystem.

Lösningstips:

Kurvor tillhörande Maclaurinpolynomen $p_0(x) = 1$ och $p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $y = \cos x$ skissas och man ser att $p_2(x)$ bättre approximerar $y = \cos x$ än vad $p_0(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$.

b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin x^2}{x(1-\cos x)}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin x^2}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)-1\right)\left(x^2-O(x^6)\right)}{x\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+O(x^4)}{\frac{x^3}{2}+O(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+O(x)\right)}{\frac{1}{2}+O(x)}=2$$

Även standardgränsvärde ger en smidig lösning…

Svar: 2

3 p

5. Lös differentialekvationen

$$y''+y=25xe^{2x}$$

Lösningstips:

Inledningsvis löser man den homogena ekvationen

$$y''+y=0$$

med hjälp av dess karaktäristiska ekvation

$$r^2 + 1 = 0$$

som har lösningarna

$$r = \pm i$$

Den homogena ekvationens lösningar blir

$$y_h = A_1 e^{ix} + A_2 e^{-ix}$$

Som med hjälp av Eulers 1:a formel kan skrivas om till

$$y_h = A\cos x + B\sin x$$

Notera att y_h inte löser den ordinarie ekvationen men y_h som ger högerledet noll kompletterar y_p (som nu skall bestämmas) så att de tillsammans bildar den allmänna lösningen.

Ansats väljs till $y_p = z(x)e^{2x}$ med $z(x) = Cx + D$ eller direkt enligt

$$y_p = (Cx + D)e^{2x}$$

Ansatsen är baserad på båda ledens utseende.

Insättning av y_p och y_p'' i ekvationen ger efter beräkningar

$$C = 5 \text{ och } D = -4$$

och därmed partikulärlösningen

$$y_p = (5x - 4)e^{2x}$$

Den allmänna lösningen blir

$$y = y_p + y_h = (5x - 4)e^{2x} + A\cos x + B\sin x$$

3 p

6. Integralen

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx$$

skall ersättas med en motsvarande produkt $f(\xi)(b-a)$ enligt Medelvärdessatsen för integraler.

a) Beräkna värdet ξ.

Lösning:

Integralen löses:

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx = \cdots = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$$

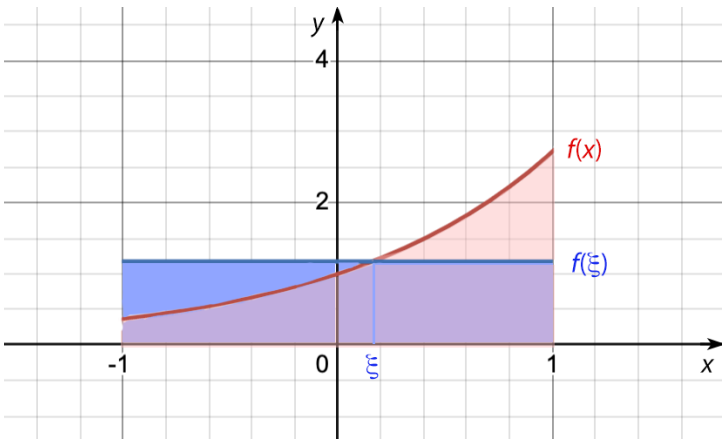
Satsen används:

$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx = \left| \begin{matrix} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{matrix} \right| = f(\xi)(b-a)$$

$$= e^{\xi} \cdot 2 = \frac{e^2 - 1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad e^{\xi} = \frac{e^2 - 1}{2e} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \ln\frac{e^2 - 1}{2e} \quad (\approx 0{,}16)$$

b) Beskriv detta med en förklarande skiss.

Svar:



$$\int_{-1}^{1} e^x \, dx = \text{röd yta} = \text{blå yta} = f(\xi)\big(1 - (-1)\big)$$

3 p

7. Beräkna på två olika sätt:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{\pi} \cos t^2\, dt$$

Metod 1: Med hjälp av bl.a. medelvärdessatsen för integraler

Metod 2: Annan valfri metod.

Lösningstips:

För att underlätta skrivs integralen om enligt:

$$\frac{d}{dx}\left(-\int_{\pi}^{x} \cos t^2\, dt\right)$$

Metod 1)

Låt

$$S(x) = \int_{\pi}^{x} -\cos t^2\, dt$$

$$S'(x) = \left|\begin{matrix}\text{Derivatans}\\ \text{definition}\end{matrix}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(S(x+h)-S(x)\big)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\pi}^{x+h} -\cos t^2\, dt - \int_{\pi}^{x} -\cos t^2\, dt\right) = \left|\begin{matrix}\text{Enligt}\\ \text{sats}\end{matrix}\right|$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} -\cos t^2\, dt = \left|\begin{matrix}\text{Medelvärdes}-\\ \text{satsen för}\\ \text{integraler}\end{matrix}\right|$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(-\cos\xi^2)(x+h-x) = \left|\begin{matrix}\xi \text{ instängt}\\ \text{mellan}\\ x \text{ och } x+h\end{matrix}\right|$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ \xi\to x}}(-\cos\xi^2) = -\cos x^2$$

Metod 2)

Förutsättningarna för Analysens huvudsats (eller Krzysztofs formel) är uppfyllda och därmed ger satsen/formeln svaret $-\cos x^2$.

3 p