

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Kompletterande tentamen för kursen VT2025

Institution: ITN
Utbildningskod: TNIU23
Modul: TEN 1
Betyg: Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0–2 p grundad på KTR1
Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid: 2025-08-30 klockan 08:00-13:00
Jour: Peter Holgersson via telefon 0705-19 99 92
Nivå: Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1. Bestäm den enda lösningen till differentialekvationen

$$y'' + y' = 24e^{3x} + 12x$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y'(0) = y(0) = 0$.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' + y' = 0$$

löses och man får

$$y_h = Ae^{-x} + B$$

Därmed fungerar ansatsen

$$y_p = Ce^{3x} + Dx^2 + Ex$$

med tillhörande derivator

$$y'_p = 3Ce^{3x} + 2Dx + E$$

$$y_p'' = 9Ce^{3x} + 2D$$

och insättning av y_p' och y_p'' i ekvationen ger

$$9Ce^{3x} + 2D + 3Ce^{3x} + 2Dx + E = 24e^{3x} + 12x$$

$$12Ce^{3x} + 2Dx + 2D + E = 24e^{3x} + 12x$$

så att

$$C = 2, \quad D = 6, \quad E = -12$$

och

$$y_p = 2e^{3x} + 6x^2 - 12x + F$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = Ae^{-x} + B + 2e^{3x} + 6x^2 - 12x$$

med derivatan

$$y' = -Ae^{-x} + 6e^{3x} + 12x - 12$$

Insättning av villkoren ger

$$\begin{cases} A + B + 2 = 0 \\ -A + 6 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -2 \\ A = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -6 \\ B = 4 \end{cases}$$

så att den sökta lösningen blir

$$y = -6e^{-x} + 4 + 2e^{3x} + 6x^2 - 12x$$

2. Låt $f_X(x)$ vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 4 \\ 1 - \frac{x}{8} & , 4 \leq x \leq 8 \\ 0 & , x > 8 \end{cases}$$

- a) Beräkna väntevärdet för denna funktion.

Lösningstips:

Väntevärdet μ fås genom

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_4^8 \left(x - \frac{x^2}{8} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{24} \right]_4^8 \\ &= \left(\frac{64}{2} - \frac{512}{24} \right) - \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{24} \right) = \left(32 - \frac{64}{3} \right) - \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 24 - \frac{56}{3} \\ &= 24 - 18 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33 \end{aligned}$$

- b) Bestäm fördelningsfunktion.

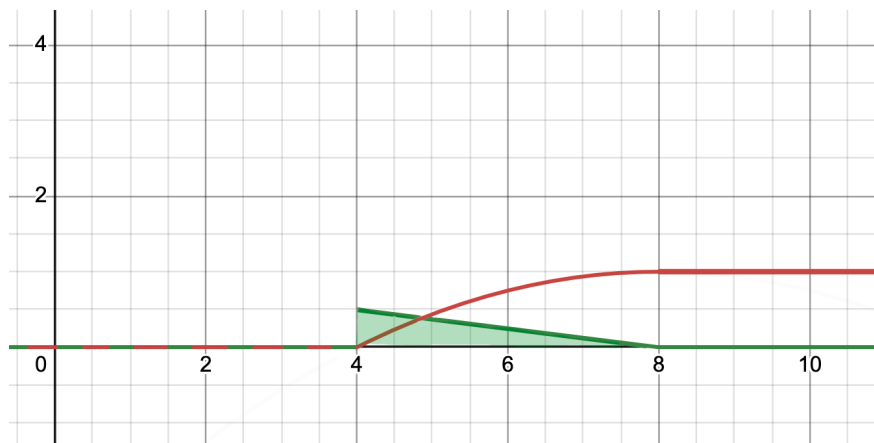
Lösningstips:

Den primitiva funktionen med anpassad konstant ger fördelningsfunktionen:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 4 \\ x - \frac{x^2}{16} - 3 & , 4 \leq x \leq 8 \\ 1 & , x > 8 \end{cases}$$

- c) Skissa täthetsfunktionen $f_X(x)$ och tillhörande fördelningsfunktion $F_X(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar:



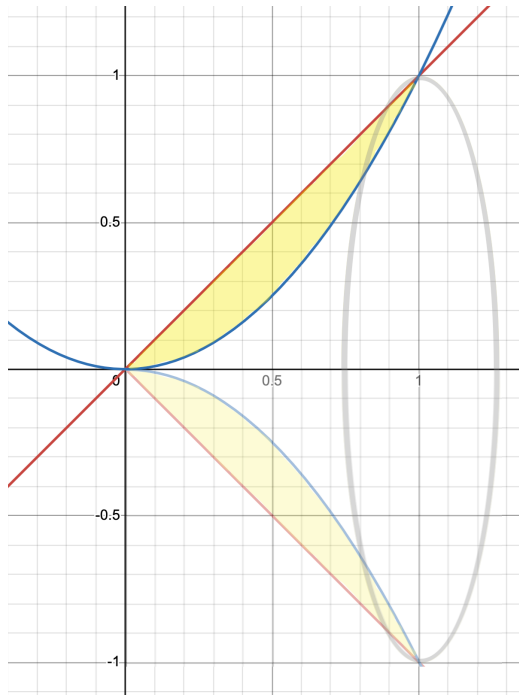
3 p

3. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då det begränsade området mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = x$ roterar...
- ...ett varv runt x -axeln.
 - ...ett varv runt y -axeln.

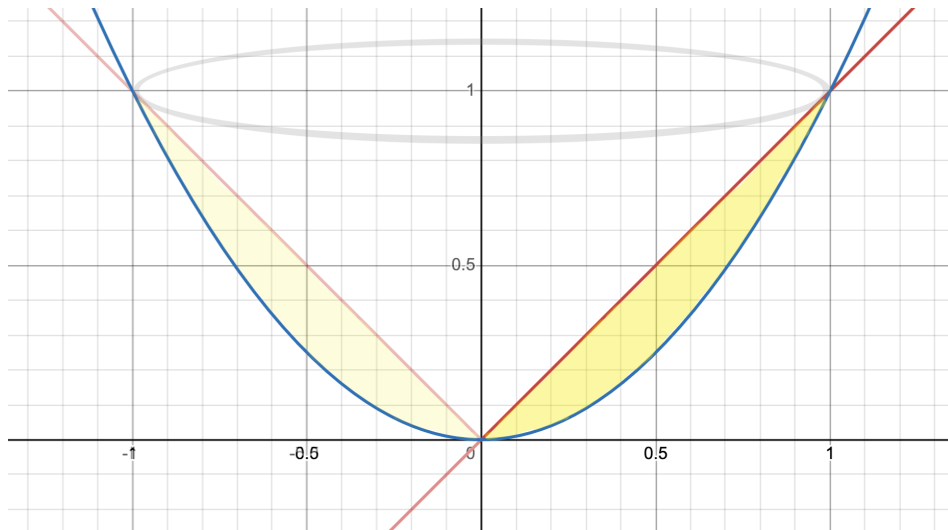
Lösningstips:

Området identifieras och skärningspunkterna är origo och $(1, 1)$. Skisser av rotationskropparna kan nu skapas.

I uppgift a) ger exempelvis skivmetoden ger runt x -axeln



$$V = V_{yttre} - V_{inre} = \underbrace{\int_0^1 \pi x^2 dx}_{\text{massiv kon}} - \underbrace{\int_0^1 \pi (x^2)^2 dx}_{\text{hålrum likt en "trumpet"}} = \dots = \frac{2\pi}{15} \text{ volymenheter}$$



I uppgift b) ger exempelvis skalmetoden (= rörmetoden) runt y-axeln

$$V = \int_0^1 \underbrace{2\pi x}_{\text{om-krets}} \underbrace{(x - x^2)}_{\substack{\text{höjden} \\ \text{tak minus} \\ \text{golv}}} dx = \dots = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \dots = \frac{\pi}{6} \text{ volymenheter}$$

4. Integralen

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

skall ersättas med en motsvarande produkt $f(\xi)(b-a)$ enligt Medelvärdessatsen för integraler.

a) Beräkna värdet ξ .

Lösning:

Integralen löses:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \dots = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

Satsen används:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= \left| \begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{array} \right| = f(\xi)(b-a) \\ &= \sin \xi \cdot \pi = 2 \Leftrightarrow \sin \xi = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Inom aktuellt intervall finns två värden på ξ :

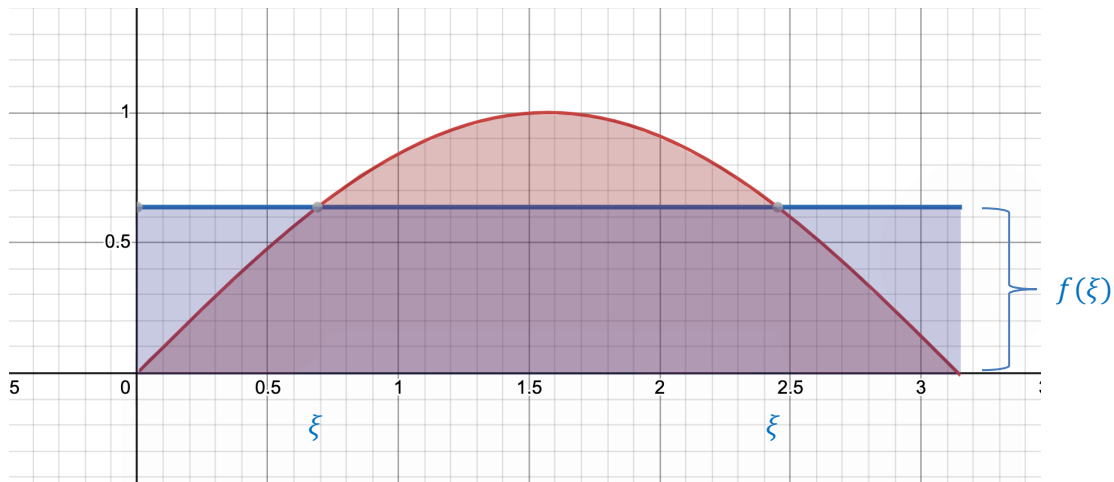
$$\xi = \arcsin \frac{2}{\pi} \quad (\approx 0,69 \text{ radianer})$$

eller

$$\xi = \pi - \arcsin \frac{2}{\pi} \quad (\approx 2,45 \text{ radianer})$$

b) Beskriv detta med en förklarande skiss.

Svar:



$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \text{röd yta} = \left| \begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{array} \right| = \text{blå yta} = f(\xi)(\pi - 0)$$

3 p

5. Serierutveckling

a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{(1 - e^{3x}) \sin x^3}$$

Lösningstips:

Maclaurin-utveckling ger

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{(1 - e^{3x}) \sin x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right)}{\left(1 - \left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + O(x^3)\right)\right)(x^3 - O(x^9))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2} + O(x^8)}{-3x^4 + O(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x^4)}{-3 + O(x)} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) Skissa kurvan

$$y = \cos x$$

tillsammans med kurvan för tillhörande Taylor-polynom av grad 1, i en omgivning av $x = \frac{\pi}{2}$.

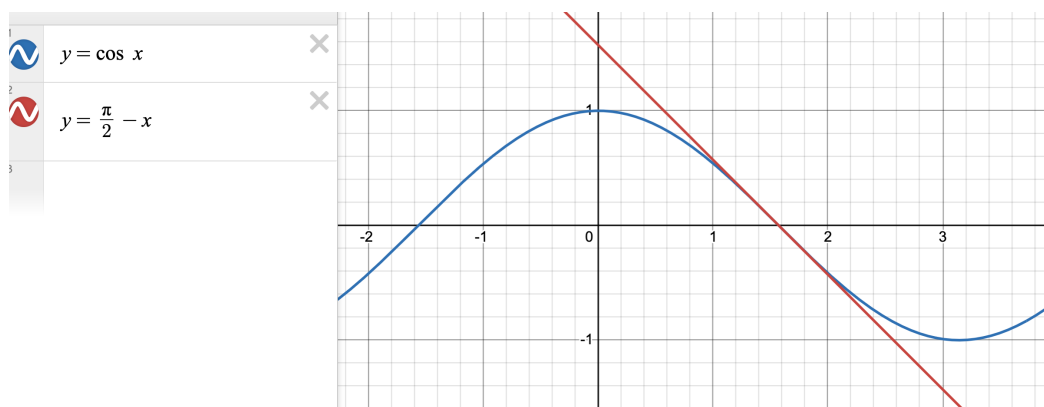
Lösningstips:

Taylor's formel ger i en omgivning till $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\cos x &= \underbrace{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^0}{0!}}_{=0} - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1}{1!} + \dots \\ &= -1 \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^1 + \dots = \frac{\pi}{2} - x + \dots\end{aligned}$$

så att Taylor-polynom av grad 1 för $y = \sin x$, i en omgivning av $x = \frac{\pi}{2}$ är

$$y = \frac{\pi}{2} - x$$



3 p

6. Låt

$$y' + \sqrt{y} = 0$$

a) Lös differentialekvationen

Lösningstips:

Inledningsvis ser man trivialallösningen

$$y = 0$$

Sedan löser man ekvationen för $y \neq 0$:

$$y' = -\sqrt{y}$$

Differentialekvationen är separabel och variablerna separeras enligt:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -dx$$

Båda leden integreras och man får den allmänna lösningen

$$2\sqrt{y} = C - x$$

Vänsterledet och högerledet är icke negativa så att

$$C - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq C$$

Löser man ut y får man svaret:

$$y = \frac{(C - x)^2}{4}, \quad x \leq C$$

Samt triviallösningen

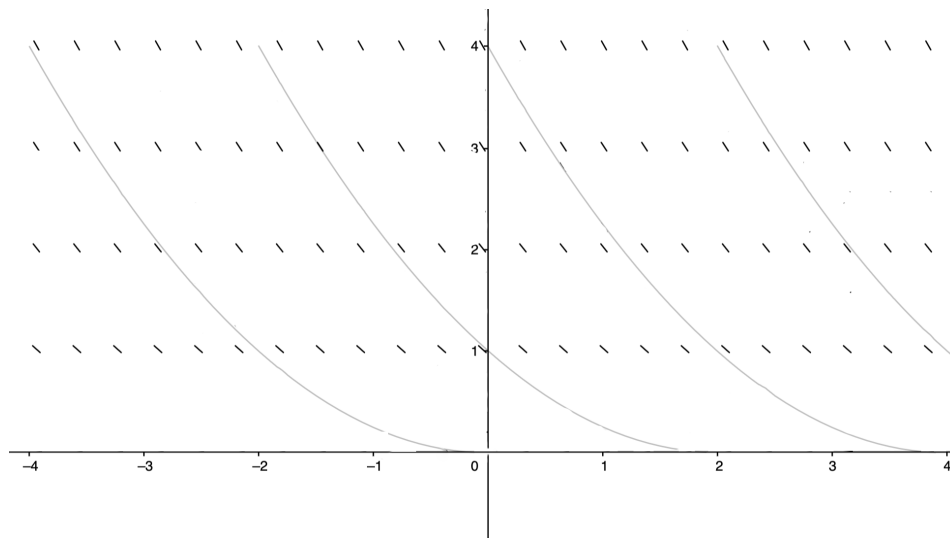
$$y = 0$$

b) Skissa tillhörande riktningsfält i 1:a och 2:a kvadranten nära origo.

Lösningstips:

$$y' = -\sqrt{y}$$

Som synes påverkas derivatan y' enbart av $-\sqrt{y}$ och inte av x . En värdetabell med utvalda y -värden mellan exempelvis 0 och 4 ger derivator y' mellan 0 och -2 och riktningsfältet för följande utseende:



Riktningsfältet ovan är en samlad bild av alla lösningar (lösningskurvor)

$$y = \frac{(C-x)^2}{4}, \quad x \leq C$$

för olika värden på C – alltså vänsterhalva på varje kurva $y = \frac{(C-x)^2}{4}$.

Samt triviallösningen

$$y = 0$$

7. Låt

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- a) Beräkna $S'(x)$ med hjälp av bland annat medelvärdessatsen för integraler.

Lösningstips:

Se beviset för Analysens huvudsats, bl.a. i läroboken på sid 286.

- b) Förklara med hjälp av egna ord och en tydlig figur vad $S'(x)$ motsvarar.

Lösningstips:

$S'(x)$ anger hur snabbt integralen $S(x)$ växer då man justerar den högra integrationsgränsen x i positiv riktning. Skissen bör innehålla en kurva, integrationsgränserna a och x samt den skuggade integralen $S(x)$. I uppgift a) får man fram att "marginaltillväxten" $S'(x)$ är lika hög som funktionsvärdet $f(x)$ i just integrationsgränsen x vilket bör anges i figuren.