

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Ordinarie tentamen för kursen VT2026

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skriftid:	2026-03-20 klockan 08:00-13:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 10 \cos x$$

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

löses, t.ex. med ansatsen $y_h = Ce^{rx}$ som leder till den karaktäristiska ekvationen med rötterna $r = 3$ och $r = 2$ som ger den homogena ekvationens lösning

$$y_h = Ae^{3x} + Be^{2x}$$

Ansatsen

$$y_p = C \sin x + D \cos x$$

$$y_p' = C \cos x - D \sin x$$

$$y_p'' = -C \sin x - D \cos x$$

$$6y_p = 6C \sin x + 6D \cos x$$

$$-5y_p' = -5C \cos x + 5D \sin x$$

$$y_p'' = -C \sin x - D \cos x$$

duger för att finna *en* lösning på ekvationen. Insättning av y_p med tillhörande y_p' och y_p'' i ekvationen ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5C + 5D = 0 \\ -5C + 5D = 10 \end{cases}$$

med lösningen

$$\begin{cases} C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

$$y_p = -\sin x + \cos x$$

så att den allmänna lösningen blir

$$y = -\sin x + \cos x + Ae^{3x} + Be^{2x}$$

3 p

2. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ 0.2 & , 2 \leq x < 5 \\ 0.1 & , 5 \leq x \leq 9 \\ 0 & , x > 9 \end{cases}$$

vara en täthetsfunktion för den stokastiska variabeln X .

a) Bestäm den tillhörande fördelningsfunktionen.

Lösningstips:

Fördelningsfunktionen till vår täthetsfunktion är den primitiva funktion som uppfyller kraven

$$F_X(2) = 0$$

och

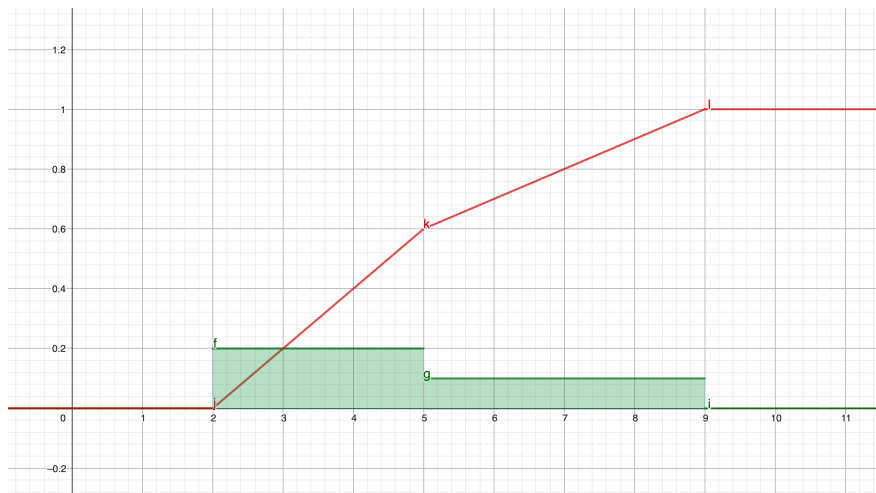
$$F_X(9) = 1$$

Alltså

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ 0.2x - 0.4 & , 2 \leq x < 5 \\ 0.1x + 0.1 & , 5 \leq x \leq 9 \\ 1 & , x > 9 \end{cases}$$

a) Rita kurvor för täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar:



b) Beräkna den övre kvartilen.

Lösningstips:

Eftersom att

$$F_X(5) = 0.6$$

så måste den övre kvartilen finnas inom intervallet $5 \leq x \leq 9$ så att

$$0.1x + 0.1 = 0.75$$

$$x_{0.5} = 6.5$$

3. Maclaurinutveckling

a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^3}{(e^{3x} - 1) \sin x^5}$$

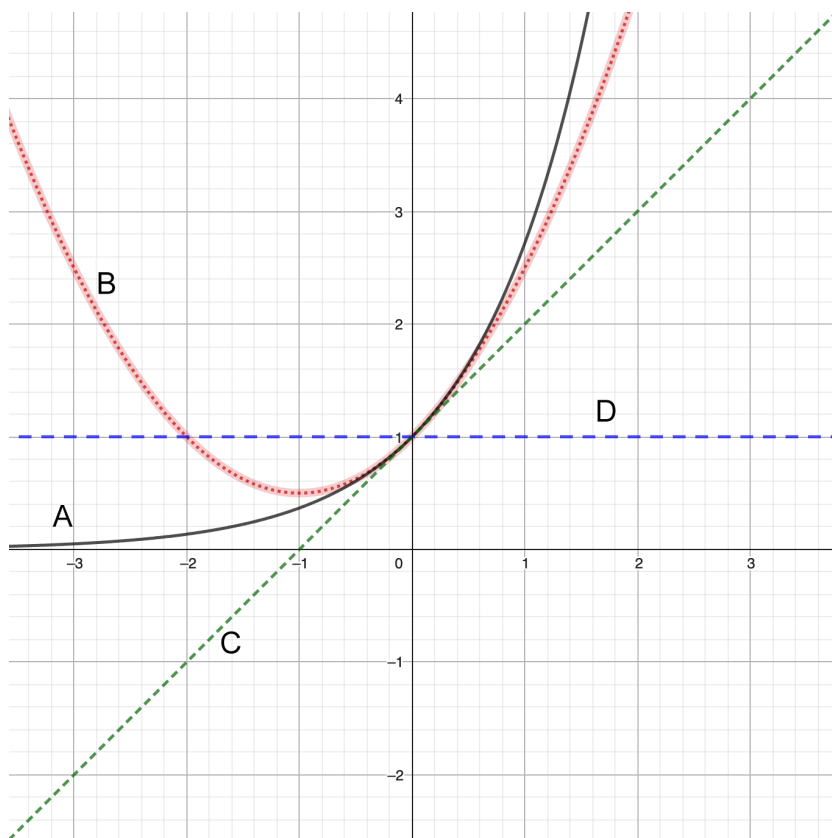
Lösningstips:

Maclaurin-utveckling ger

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^3}{(e^{3x} - 1) \sin x^5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^6}{2} + \mathcal{O}(x^{12})\right)}{(1 + 3x + \mathcal{O}(x^2) - 1)(x^5 - \mathcal{O}(x^{15}))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^6}{2} + \mathcal{O}(x^{12})}{3x^6 + \mathcal{O}(x^7)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^6)}{3 + \mathcal{O}(x)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Även standardgränsvärden ger en smidig lösning...

b) Vad är vad (A–D) i följande figur? För full poäng krävs ekvationer och kommentarer. Ledtråd Maclaurin...



Svar:

A = funktionskurvan $y = e^x$

B = tillhörande Maclaurin-kurva av grad 0, alltså $y = 1$

C = tillhörande Maclaurin-kurva av grad 1, alltså $y = 1 + x$

D = tillhörande Maclaurin-kurva av grad 2, alltså $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

4. Visa med hjälp av över- och undersumma att:

$$\frac{13}{10} < \int_{-2}^2 \frac{1}{1+x^2} dx < \frac{29}{10}$$

Lösning:

Funktionskurvan skissa med hjälp av värdetabell och är en uppenbart jämn funktion då positiva och negativa x -värden ger samma funktionsvärden.

Över- och undersumma med *ett* delintervall $x \in [-2, 2]$ ger tyvärr resultatet

$$\frac{8}{10} = \frac{1}{5} \cdot 4 \leq \int_{-2}^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1 \cdot 4 = \frac{40}{10}$$

och den olikheten uppfyller inte kravet. Fler delintervall behövs...

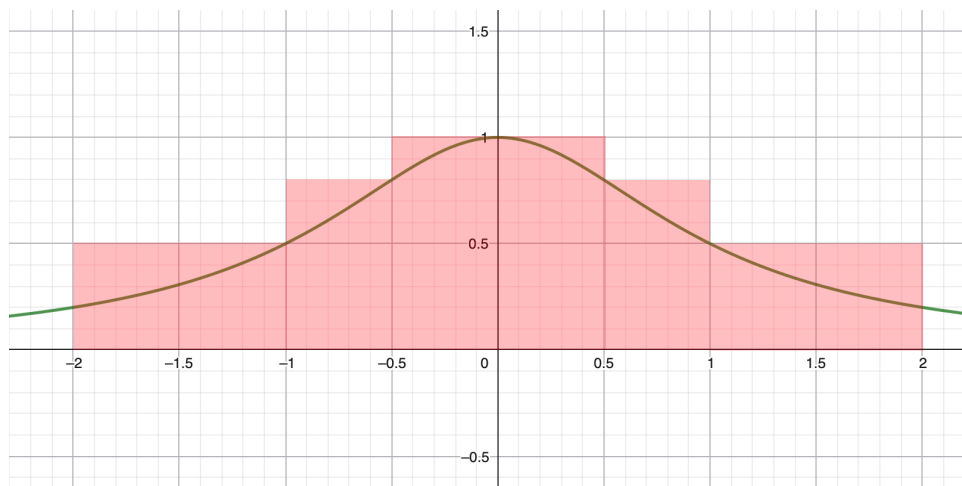
Undersumma med *fyra* delintervall (två per sida och symmetri):



$$2 \left(\frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = 2 \left(\frac{2}{10} + \frac{5}{10} \right) = \frac{14}{10}$$

vilket duger.

Översumma med sex delintervall med olika bredd (tre per sida och symmetri):



$$2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\frac{5}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} \right) = \frac{28}{10}$$

vilket också duger

Alltså gäller att

$$\frac{14}{10} \leq \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \frac{28}{10}$$

vilket uppfyller kravet

$$\frac{13}{10} < \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx < \frac{29}{10}$$

5. Differentialekvationer av första ordningen

a) Lös differentialekvationen

$$y' + 2xy = 6x$$

med hjälp av integrerande faktor.

Lösningstips:

Med integrerande faktor e^{x^2} får man

$$e^{x^2} y' + e^{x^2} 2x y = e^{x^2} 6x$$

och vänsterledet kan nu skrivas som derivatan av en produkt enligt

$$(e^{x^2} y)' = e^{x^2} 6x$$

och efter ledvis integration (partiell integration i högerledet) får man

$$e^{x^2} y = 3 \int e^{x^2} 2x dx$$

Integralen löses med variabelskifte $u = e^{x^2}$ och man får

$$e^{x^2} y = 3e^{x^2} + C$$

så att den allmänna lösningen blir

$$\Leftrightarrow y = 3 + \frac{C}{e^{x^2}}$$

b) Lös differentialekvationen

$$y' = \frac{3y-1}{x}$$

genom att separera variablerna.

Lösningstips:

Variablerna separeras:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{3y-1}{x} \\ \frac{1}{3y-1} dy &= \frac{1}{x} dx, \quad y \neq \frac{1}{3}, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

Man tvingas välja bort lösningskurvan $y = \frac{1}{3}$ tillfälligt p.g.a. separationen

och vi återkommer till den kurvan i slutet...

Man integrerar ledvis:

$$\frac{1}{3} \int \frac{3}{3y-1} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \ln|3y - 1| = \ln|x| + A$$

och löser ut y :

$$\Leftrightarrow \ln|3y - 1|^{\frac{1}{3}} - \ln|x| = +A$$

$$\Leftrightarrow \ln|3y - 1|^{\frac{1}{3}} - \ln|x| = +A$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{|3y - 1|^{\frac{1}{3}}}{|x|} = A$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3y - 1|^{\frac{1}{3}}}{|x|} = e^A$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3y - 1|^{\frac{1}{3}}}{|x|} = B, \quad B > 0$$

$$\Leftrightarrow |3y - 1|^{\frac{1}{3}} = B|x|$$

$$\Leftrightarrow |3y - 1| = B^3|x^3|$$

$$\Leftrightarrow 3y - 1 = Cx^3, \quad C \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = Cx^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{Cx^3 + 1}{3} \Leftrightarrow y = Dx^3 + \frac{1}{3}, \quad D \neq 0$$

Alternativet $y = \frac{1}{3}$ som valdes bort vid separationen av variablerna

kontrolleras nu och är OK enligt den ursprungliga ekvationen vilket gör

att $D \in \mathbb{R}$ och den allmänna lösningen blir

$$\Leftrightarrow y = Dx^3 + \frac{1}{3}$$

3 p

6. Visa med hjälp av cirkelns ekvation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

och en rotationsyta att klotets area

$$A = 4\pi r^2$$

Lösningstips:

Cirkelns ekvation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ger den över- och underfunktionerna

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm(r^2 - x^2)^{1/2}$$

Överfunktionen har derivatan

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-1/2} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Med hjälp av överfunktionen skapas delsträckor längs kurvan enligt

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) (dx)^2} \\ &= \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

Rotationsytan byggs upp av stående band runt y -axeln, med arean

$$dA = \text{Omkrets} \cdot \text{bredd} = 2\pi y ds = 2\pi\sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r dx$$

Banden summeras så att hela ytans area beräknas

$$A = \int_{-r}^r 2\pi r dx = 2\pi r \int_{-r}^r 1 dx = 2\pi r [x]_{-r}^r = 2\pi r (r - (-r)) = 4\pi r^2$$

7. Medelvärdessatsen för integraler

Vilket värde $x = \xi$ ger likhet för integralen

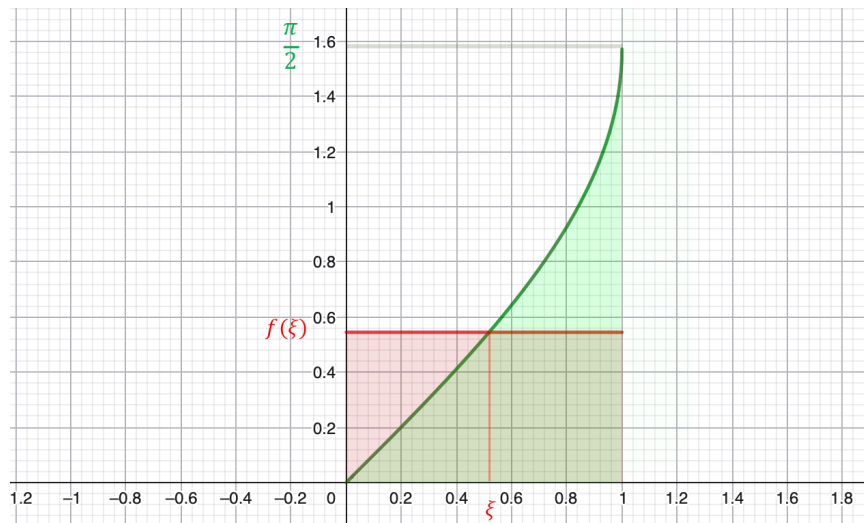
$$\int_0^1 \arcsin x \, dx$$

enligt Medelvärdessatsen för integraler?

Lösningstips:

Enligt Medelvärdessatsen för integraler gäller för denna kontinuerliga och deriverbara funktion att

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = f(\xi)(b - a)$$



Integralen i vänsterledet beräknas:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin x \, dx &= \int_0^1 1 \cdot \arcsin x \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right| \\ &= [x \arcsin x]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= [x \arcsin x]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = 1 - x^2 \\ \frac{du}{dx} = -2x \\ du = -2x \, dx \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} [2\sqrt{u}]_1^0 = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Så att $\arcsin \xi$ och sedan ξ kan lösas ut

$$f(\xi)(b-a) = \arcsin \xi (1-0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \arcsin \xi = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \xi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Vilket ger full poäng.

Om man önskar förenkla svaret får man

$$\xi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \left| \begin{array}{c} \text{spiegling} \\ \text{i första} \\ \text{kvadranten} \end{array} \right| = \cos 1 \approx \cos 57^\circ \approx 0.54$$