

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningssanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningssanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Kompletterande tentamen för kursen VT2026

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid:	2026-06-10 klockan 14:00-19:00
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1.

a) Lös differentialekvationen

$$y' = x - y$$

Lösningstips:

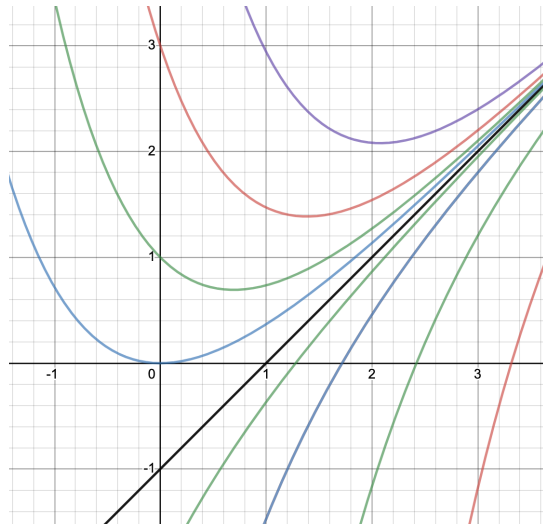
Lösning exempelvis med hjälp av integrerande faktor ger den allmänna lösningen

$$y = x - 1 + \frac{C}{e^x}$$

b) Skissa tillhörande riktningsfält inom $-1 \leq x \leq 3$ och $-1 \leq y \leq 3$.

Lösningstips:

Värdetabell med x , y och y' inom angivna intervall ger följande fält med en rätlinjig lösningskurva $y = x - 1$ vilka övriga lösningskurvor närmar sig då $x \rightarrow \infty$:

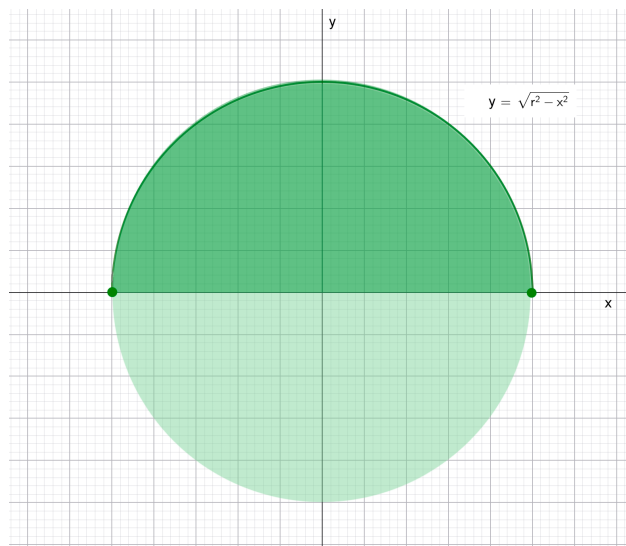


3 p

2. Beräkna med hjälp av en integral volymen av den rotations kropp som uppkommer då det begränsade området mellan kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ och x -axeln roterar ett varv runt x -axeln.

Lösningstips:

Funktionens definitionsmängd $D_f = [-r, r]$ och en skiss för rotationskroppen skapas:



Volymen beräknas med skivmetoden enligt

$$V = \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ volymenheter}$$

vilket stämmer med volymen av en sfär med radien r .

3 p

3. Låt

$$f_X(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{2} & \text{för } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{övriga } x \end{cases}$$

a) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion.

Lösningstips:

För fördelningsfunktioner gäller enligt sats att de är växande samt att

$$F(2) = 0$$

och

$$F(3) = 1$$

I detta fall gäller att då $x \in [2, 3]$ är

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + C$$

C anpassas så att

$$F(2) = \frac{2^2}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} + C = |\text{krav}| = 0$$

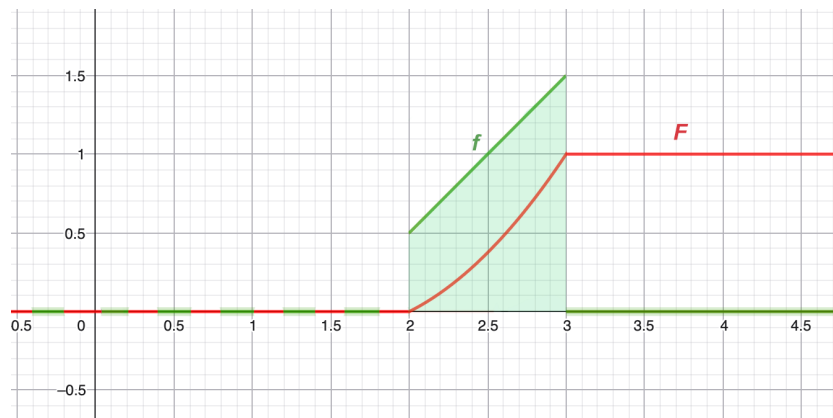
$$F(3) = \frac{3^2}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} + C = |\text{krav}| = 1$$

Därmed inses att $C = 1$ så att

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1 & , \quad \text{för } 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

b) Rita kurvor för täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i samma koordinatsystem.

Svar:



c) Beräkna medianen.

Lösningstips:

Definitionen av medianen $x_{0.5}$ ger i detta fall

$$\int_2^b f(x)dx = \int_2^b \left(x - \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2}\right]_2^b = \dots = |\text{krav}| = \frac{1}{2}$$

vilket ger ekvationen

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{2} - \frac{3b}{2} + \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 3b + 1 &= 0\end{aligned}$$

Som kvadratkompletteras

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

varav den ena roten

$$x_{0.5} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

är rimlig och finns inom rätt intervall.

Man kan även sätta

$$F_X(x) = \frac{1}{2}$$

och få samma svar

$$x_{0.5} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 2,62$$

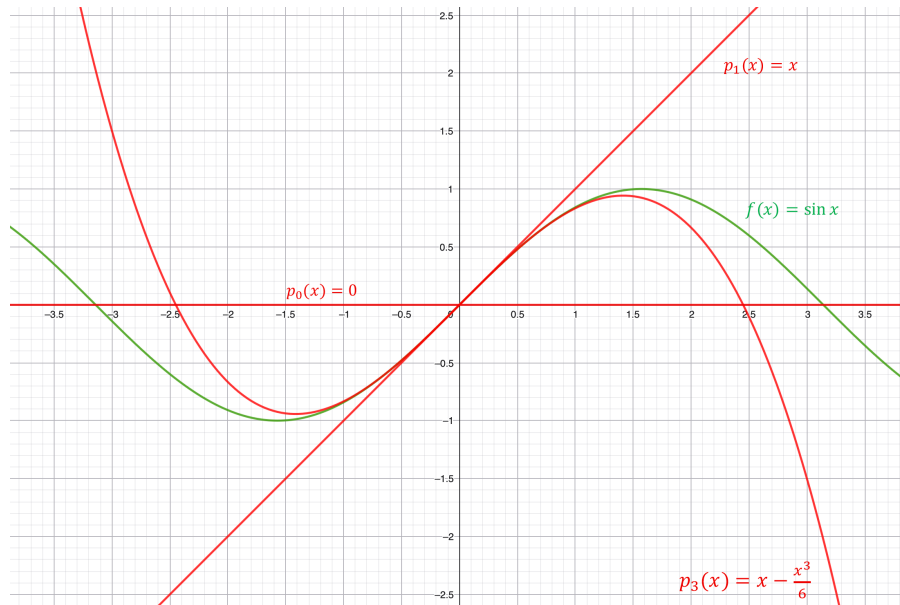
3 p

4. Maclaurin-polynom

- a) I en omgivning till $x = 0$, skissa kurvan till $y = f(x) = \sin x$ samt kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 0, grad 1 och grad 3 i ett *gemensamt* koordinatsystem.

Lösningstips:

Kurvor tillhörande Maclaurinpolynomen $p_0(x) = 0$, $p_1(x) = x$ och $p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ samt funktionen $f(x) = \sin x$ skissas med hjälp av **värdetabeller** och man ser att $p_3(x)$ bättre approximerar $y = \sin x$ än vad $p_0(x)$ och $p_1(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$:



b) Bestäm A så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A - \cos x}{\sin x^2}$$

blir ändligt och beräkna gränsvärdet.

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A - \cos x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x^2 + O(x^6)}$$

För att gränsvärde skall existera ändligt (då $x \rightarrow 0$) krävs att täljaren har lika hög eller högre grad än nämnaren. I detta fall krävs att $A = 1$ för att gränsvärdet skall existera ändligt.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x^2 + O(x^6)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-1}{x^2} + \frac{1}{2} + O(x^2)}{1 + O(x^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x^2)}{1 + O(x^4)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. Lös differentialekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$$

Lösningstips:

Inledningsvis löser man den homogena ekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

med hjälp av dess karakteristiska ekvation

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

som har lösningarna

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 2$$

och den homogena ekvationens lösningar blir

$$y_h = Ae^{3x} + Be^{2x}$$

Tyvärr "krockar" detta med högerledet så att ansatsen för partikulärlösning blir

$$\begin{aligned} y_p &= z(x)e^{2x} \\ y'_p &= z'(x)e^{2x} + 2z(x)e^{2x} \\ y''_p &= z''(x)e^{2x} + 4z'(x)e^{2x} + 4z(x)e^{2x} \end{aligned}$$

Insättning i ekvationen ger

$$\begin{aligned} VL &= y'' - 5y' + 6y \\ &= (z''(x) + 4z'(x) + 4z(x) - 5(z'(x)e^{2x} + z(x)2) + 6z(x))e^{2x} \\ &= (z''(x) - z'(x))e^{2x} = 4e^{2x} = HL \\ \Leftrightarrow z''(x) - z'(x) &= 4 \quad \Leftrightarrow \quad z'(x) = -4 \quad \text{och} \quad z''(x) = 0 \end{aligned}$$

så att

$$z(x)e^{2x} = (-4x + C)e^{2x}$$

Men då man redan har $y_h = Ae^{3x} + Be^{2x}$ så ger C en repris och

$$y_p = -4xe^{2x}$$

duger och därmed blir den allmänna lösningen

$$y = Ae^{3x} + (B - 4x)e^{2x}$$

6. Beräkna

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_e^{x+h} e^{t^2} dt - \int_e^x e^{t^2} dt \right)$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_e^{x+h} e^{t^2} dt - \int_e^x e^{t^2} dt \right) &= \left| \begin{array}{l} \text{Enligt} \\ \text{sats 6.2 e} \end{array} \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} e^{t^2} dt = \left| \begin{array}{l} \text{Enligt Medelvärdes-} \\ \text{satsen för integraler} \\ \text{med } x \leq \xi \leq x+h \end{array} \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{\xi^2})(x+h-x) = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\xi^2} = \left| \begin{array}{l} \xi \text{ instängt} \\ \text{mellan} \\ x \text{ och } x+h \end{array} \right| \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow x}} e^{\xi^2} = e^{x^2} \end{aligned}$$

3 p

7. Bestäm den enda lösningen till differentialekvationen

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2 \arctan x$$

som uppfyller $y(0) = 3$.

Ledning

Detta är uppgift 8.13 i övningshäftet. Ekvationen skrivs på normalform.

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = (1+x^2) \arctan x$$

Ekvationen förenklas sedan med hjälp av den integrerande faktor enligt

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{2x}{1+x^2} \\ G(x) &= -\ln(1+x^2) = \ln(1+x^2)^{-1} \\ e^{G(x)} &= e^{\ln(1+x^2)^{-1}} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

och man får

$$\frac{1}{1+x^2} y' - \frac{2x}{(1+x^2)^2} y = \arctan x$$

vars vänsterled är en produktderivata enligt

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+x^2} y \right) = \arctan x$$

Integration av båda leden (partiell integration med en etta i högerledet) ger

$$\frac{y}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$y = (1+x^2) \left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \right)$$

och med hänsyn till villkoret $y(0) = 1$ får man

$$3 = \left(0 \arctan 0 - \frac{1}{2} \ln 1 + C \right)$$

så att

$$C = 3$$

och den enda lösningen blir

$$y = (1+x^2) \left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + 3 \right)$$

3 p