

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningssanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningssanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 2

Kompletterande tentamen för kursen VT2026

Institution:	ITN
Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	TEN 1
Betyg:	Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid:	2026-08-29 klockan 08:00-13:00
Jour:	Peter Holgersson via telefon 0705-19 99 92
Nivå:	Uppgifterna 1–3 testar enbart färdigheter för betyg 3 medan uppgifterna 4–7 även testar färdigheter för betyg 4 och 5.

1. Bestäm den enda lösningen till differentialekvationen

$$y'' - y' = \sin x$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 8$ och $y'(0) = 2$.

Lösningstips:

Den homogena ekvationen

$$y'' - y' = 0$$

löses och man får

$$y_h = Ae^x + B$$

Därmed fungerar ansatsen

$$y_p = C \sin x + D \cos x$$

med tillhörande derivator

$$y'_p = C \cos x - D \sin x$$

$$y_p'' = -C \sin x - D \cos x$$

och insättning av y_p' och y_p'' i ekvationen ger

$$-C \sin x - D \cos x - (C \cos x - D \sin x) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (D - C) \sin x + (-D - C) \cos x = \sin x$$

så att

$$\begin{cases} -C - D = 0 \\ -C + D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

och

$$y_p = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = Ae^x + B - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

med derivatan

$$y' = Ae^x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

Insättning av villkoren ger

$$\begin{cases} A + B + \frac{1}{2} = 8 \\ A - \frac{1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{2} \\ B = 5 \end{cases}$$

så att den sökta lösningen blir

$$y = 4e^x + 2 - \frac{5}{2} \sin x + 5 \cos x$$

3 p

2. Låt $f_X(x)$ vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{3x} & , \quad x \leq 0 \\ 2e^{-3x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Bestäm fördelningsfunktion.

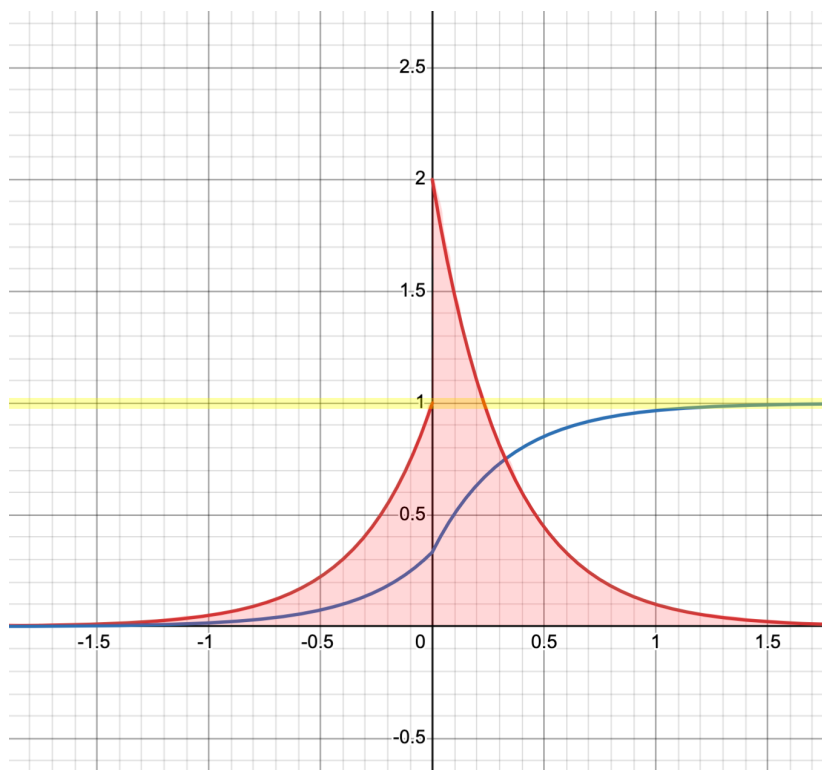
Lösningstips:

Den primitiva funktionen med anpassad konstant ger
fördelningsfunktionen:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{3x} & , \quad x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-3x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

- b) Skissa täthetsfunktionen $f_X(x)$ och den tillhörande fördelningsfunktionen $F_X(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar:



c) Beräkna medianen.

Lösningstips:

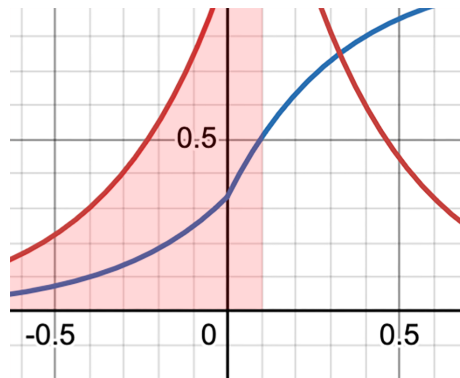
Eftersom $F_X(0) = \frac{1}{3}$ måste medianen finnas till höger om skarven i $x = 0$ och ekvationen

$$1 - \frac{2}{3}e^{-3x} = \frac{1}{2}$$

Ger därmed medianen

$$x_{0.5} = \frac{\ln 4 - \ln 3}{3} \approx 0.1$$

vilket stämmer bra med kurvan hos fördelningsfunktionen:



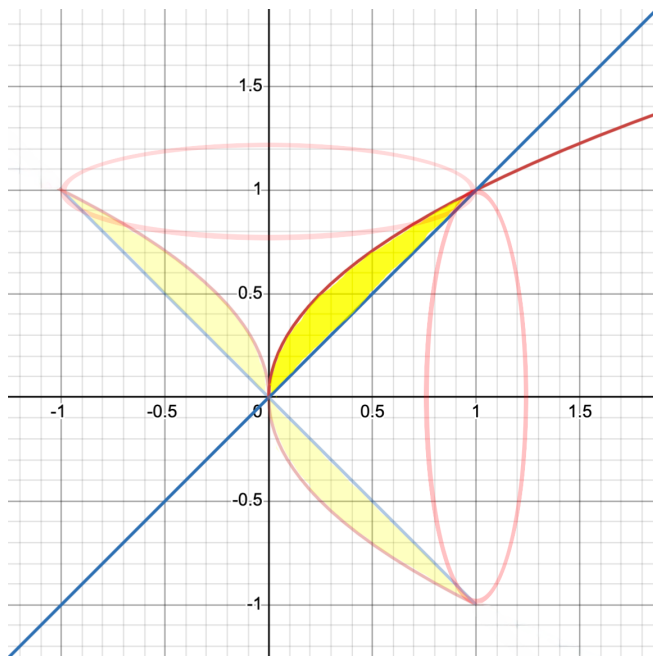
3 p

3. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då det begränsade området mellan kurvan $y = \sqrt{x}$ och linjen $y = x$ roterar...

- a) ...ett varv runt x -axeln.
- b) ...ett varv runt y -axeln.

Lösningstips:

Området identifieras och skärningspunkterna är origo och (1, 1). Skisser av rotationskropparna kan nu skapas.



I uppgift a) ger exempelvis skivmetoden ger runt x -axeln

$$V = V_{yttre} - V_{inre} = \underbrace{\pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx}_{\text{massiv kon}} - \underbrace{\pi \int_0^1 x^2 dx}_{\text{hålrum likt en "trumpet"}} = \dots = \frac{\pi}{6} \text{ volymenheter}$$

I uppgift b) ger exempelvis skalmetoden (= rörmetoden) runt y -axeln

$$V = \int_0^1 \underbrace{2\pi x}_{\text{omkrets}} \underbrace{(\sqrt{x} - x)}_{\substack{\text{höjden} \\ \text{tak minus} \\ \text{golv}}} dx = \dots = 2\pi \left[\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \dots$$

$$= \frac{2\pi}{15} \text{ volymenheter}$$

4. Integralen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx$$

skall ersättas med en motsvarande produkt $f(\xi)(b-a)$ enligt Medelvårdessatsen för integraler.

a) Beräkna värdet ξ .

Lösning:

Integralen löses:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \dots = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

Satsen används:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{medelvårdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{array} \right| = f(\xi)(b-a) \\ &= \cos \xi \cdot \pi = 2 \Leftrightarrow \cos \xi = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Inom aktuellt intervall finns två värden på ξ :

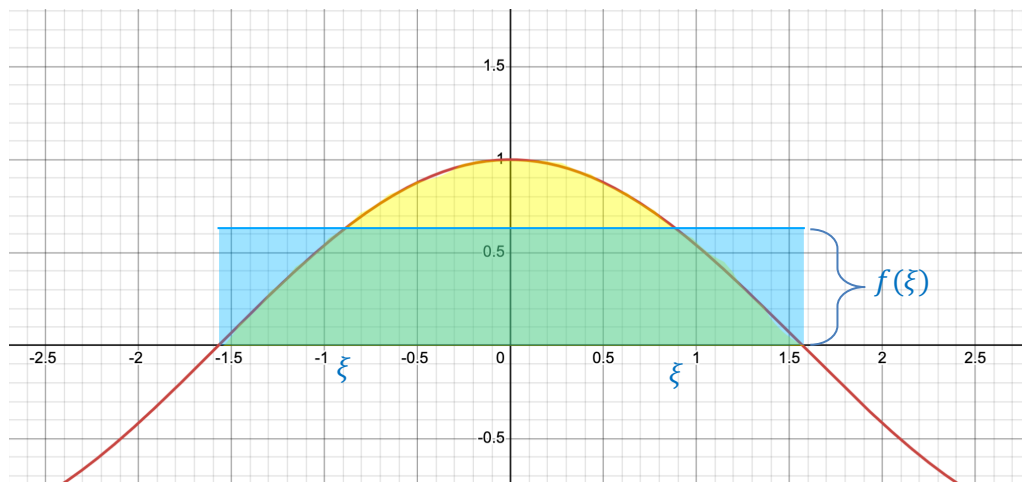
$$\xi = \arccos \frac{2}{\pi} \quad (\approx 0,88 \text{ radianer} \approx 50^\circ)$$

eller

$$\xi = -\arccos \frac{2}{\pi} \quad (\approx -0,88 \text{ radianer} \approx -50^\circ)$$

b) Beskriv detta med en förklarande skiss.

Lösningstips:



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = \text{gul yta} = \left| \begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdes} \\ \text{satsen för} \\ \text{integraler} \end{array} \right| = \text{blå yta} = f(\xi) \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

3 p

5. Serierutveckling

a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) \sin x^2}{(1-e^{3x})(1-\cos x^2)}$$

Lösningstips:

Maclaurin-utveckling ger

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3) \sin x^2}{(1-e^{3x})(1-\cos x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + O(x^6))(x^2 + O(x^6))}{\left(1 - (1 + 3x + O(x^2))\right) \left(1 - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right)\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + O(x^8)}{-\frac{3x^5}{2} + O(x^6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + O(x^3)}{-\frac{3}{2} + O(x)} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Skissa kurvan

$$y = e^x$$

tillsammans med kurvan för tillhörande Maclaurin-kurvan av grad 2.

Lösningstips:

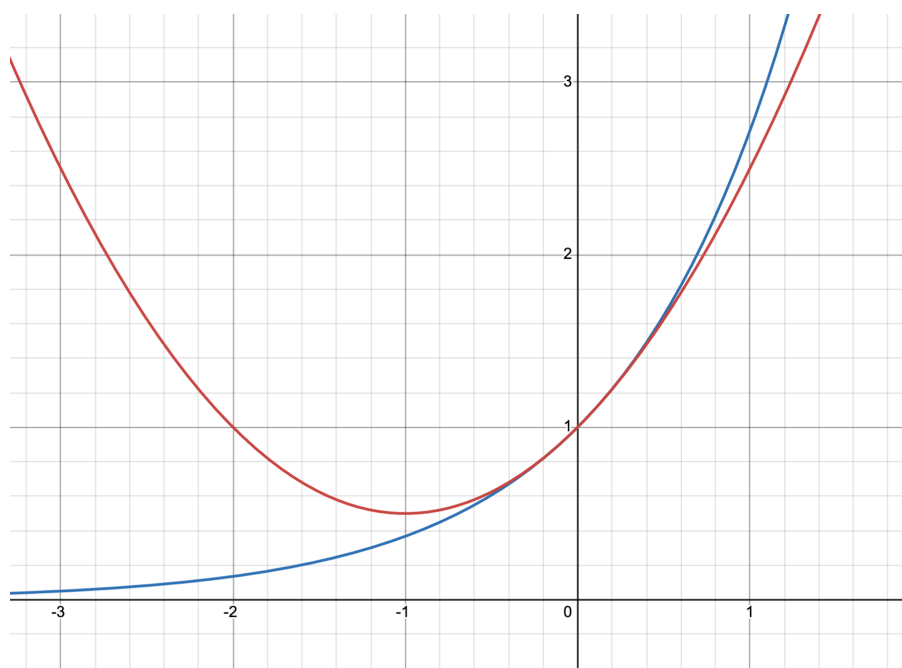
Med hjälp av värdetabeller skissa kurvorna till $y = e^x$ och tillhörande Maclaurin-kurva $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

x	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	e^x
-2	1	$e^{-2} = 1/e^2 \approx 0,1$
-1	0,5	$e^{-1} = 1/e \approx 0,4$
0	1	$e^0 = 1$
1	2,5	$e^1 \approx 2,7$
2	5	$e^2 \approx 7$

Man ser bland annat att både funktionsvärde och derivata

överensstämmer i $x = 0$ samt att Maclaurin-kurvan ligger aningen under

exponentialkurvan i $x = 1$ där $y = 2,5$ respektive $y = e$:



3 p

6. Låt

$$yy' = 1$$

a) Lös differentialekvationen och svara med eventuella krav på konstanter.

Lösningstips:

$$y \frac{dy}{dx} = 1$$

Differentialekvationen är separabel och variablerna separeras enligt:

$$y \, dy = dx$$

Båda leden integreras och man får

$$\frac{y^2}{2} = x + C$$

så att den allmänna lösningen

$$y = \pm\sqrt{2x + D}$$

Med kravet

$$2x + D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow D \geq -2x$$

b) Skissa tillhörande riktningsfält i 1:a och 2:a kvadranten nära origo.

Lösningstips:

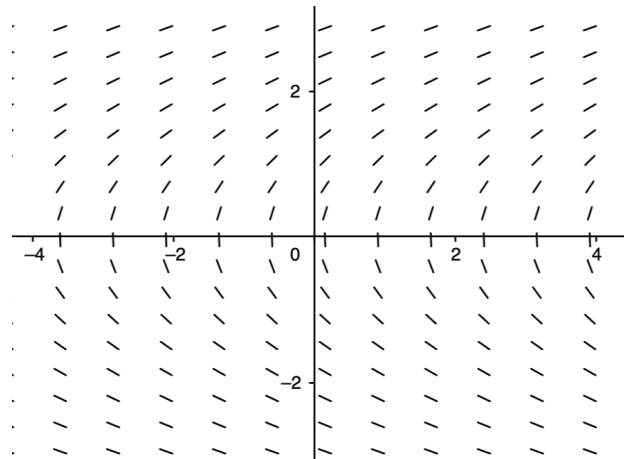
För $y \neq 0$ skrivs ekvationen enligt

$$y' = \frac{1}{y}$$

Som synes påverkas derivatan y' enbart av y -värden och inte av x -värden.

En värdetabell med utvalda y -värden mellan exempelvis -3 och 3 (förutom $y = 0$) ger värden på y' .

För triviallösningen $y = 0$ får man vertikala lösningskurvor och riktningsfältet får följande utseende:



3 p

7. Låt

$$A(x) = \int_a^x \sin t^2 dt$$

- a) Visa med hjälp av bland annat derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler att

$$A'(x) = \sin x^2$$

Lösningstips:

Se beviset för Analysens huvudsats i läroboken på sid 286.

- b) Förklara med hjälp av egna ord och en tydlig figur vad $A'(x)$ motsvarar.

Lösningstips:

$A'(x)$ anger hur snabbt integralen $A(x)$ växer då man justerar den högra integrationsgränsen x i positiv riktning. Skissen bör innehålla en kurva, integrationsgränserna a (konstant) och x (variabel) samt den skuggade integralen $A(x)$.

I uppgift a) får man informationen att "marginaltillväxten" $A'(x)$ är lika hög som funktionsvärdet i den högra integrationsgränsen x , alltså $\sin x^2$ vilket bör markeras i figuren.

