

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT 2017

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN2
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I–III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I–III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 respektive 5 tillgodoräknas vid betyg G på tillhörande KTR 4–6
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, passare, gradskiva
Skrivtid: 2018-08-28, kl. 08:00–13:00

Del I

1. Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Bestäm eventuella reella lösningar till ekvationen:

$$x - 22 + \sqrt{x - 2} = 0$$

Svar: $x = 18$ (den ena av två tänkbara rötter förkastas efter prövning)

- b) Vilket bråk har följande decimalutveckling:

$$0.17\bar{3} = 0.17333 \dots$$

Svar: $\frac{13}{75}$

- c) Mängden rationella tal är en delmängd av mängden reella tal. Förklara med egna ord vad detta betyder.

Svar: Reella tal är alla ta som kan skrivas med eller utan decimalutveckling. Vissa reella tal kan skrivas med hjälp av bråk och kallas dessutom för rationella tal – alltså en grupp tal inom de reella talen, en äkta delmängd av de reella talen.

2. Lös olikheten:

$$x^3 + 11x \leq 6x^2 + 6$$

Svar: Faktorisering och teckenstudium ger $x \in]-\infty, 1] \cup [2, 3]$

Del II

3. Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Bestäm $f^{-1}(x)$ och skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem:

a)

$$f(x) = 2 - 4x$$

Svar: Se kurshäftet

b)

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Svar: Se kurshäftet

c)

$$f(x) = \arctan x$$

Svar: Se kurshäftet

4. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

a)

$$\tan \frac{\pi}{6}$$

Svar: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b)

$$\ln(x^2 - 9) - \ln(x - 3)^2 - \ln(x + 3)$$

Svar: $-\ln(x - 3)$

c)

$$\tan(\arccos 2x)$$

Svar: $\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x}$

Del III

5. Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Beräkna z^5 om

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\text{Svar: } z^5 = -\frac{32}{\sqrt{2}} - \frac{32}{\sqrt{2}}i$$

- b) Lös ekvationen:

$$|z + 4 - 2i| = 3$$

Svar: Alla punkter i det komplexa talplanet som finns längs en cirkel med radien 3 och centrum i punkten $z = -4 + 2i$

- c) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form):

$$3z^3 = -81i$$

$$\text{Svar: } z_1 = 3i \text{ eller } z_{2,3} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

6. Lös ekvationen:

$$z^2 - (4 + 8i)z - 17 + 4i = 0$$

Svar: Ersättning med $z = a + bi$ ger $\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$, detta genom studie av realdel, imaginärdel och absolutbelopp hos höger- och vänsterled. Insättning av $a = \pm 3$ och $b = \pm 2$ ger därefter $z_1 = 5 + 6i$ eller $z_2 = -1 + 2i$