

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Ordinarie tentamen för kursen HT 2018

Utbildning: TNIU19
Modul: TEN2
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I-III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I-III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg G på tillhörande KTR4–KTR6 skrivna senast 1 år tidigare
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, passare, gradskiva
Skrivtid: 2018-10-26, kl 08:00–13:00
Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

Svar: Gissade rötter och polynomdivision med tillhörande faktorer ger $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,
 $x_3 = 2$ eller $x_4 = 3$

- b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = 7 \\ -2x + 2y - z = -11 \end{cases}$$

Svar: Successiv elimination ger $x = 10$, $y = 5$ och $z = 1$

- c) Lös olikheten

$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x - 3} \geq 0$$

Svar: Faktorisering och teckenstudium ger $x \in [-4, -2] \cup]3, \infty[$

3 p

2. Lös olikheten

$$3|2 - x| + |x + 2| < 8$$

Svar: Studie av tre intervall ger $x \in]0, 3[$

3 p

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a) $\cos x (1 - 2\sin x) = 0$

Svar: $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

b) $\sin^2 x - 4 \sin x + 3 = 0$

Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

c) $\lg(-2x) = 3 - \lg(-5x)$

Svar: $x = -10$

3 p

4. Låt $y = f(x) = \ln(1 - x)$.

a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

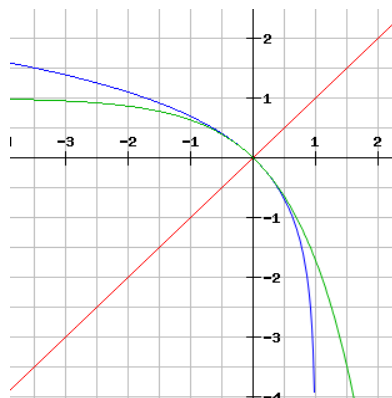
Svar: $D_f \in]-\infty, 1[$ och $V_f \in]-\infty, \infty[$

b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = 1 - e^x$ $D_{f^{-1}} \in]-\infty, \infty[$ och $V_{f^{-1}} \in]-\infty, 1[$

c) Skissa tydliga kurvor till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar: Notera att korrekt skissade grafer tydligt skall begränsas av sina definitionsmängder enligt ovan...



3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Beräkna z^4 om

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$\text{Svar: } z^4 = -16$$

- b) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form):

$$3z^4 = -48$$

$$\text{Svar: } z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i \text{ eller } z_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$$

- c) Markera i det komplexa talplanet:

$$|z - 4 - 3i| = 2$$

Svar: Låt $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$. Ekvationen motsvarar då en cirkel med radien $r = 2$ och centrum i punkten $(4, 3)$ i det komplexa talplanet och beskrivs av ekvationen $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

3 p

6. Lös ekvationen $2z^2 + (8 - 2i)z = 10i - 10$

Ledning: $z^2 + (4 - i)z + 5 - 5i = 0$ kvadratkompletteras.

$$\text{Ersättning med av parenteserna } x + iy \text{ ger } \begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{5}{4} \\ 2xy = 3 \\ x^2 + y^2 = \frac{13}{4} \end{cases}.$$

Insättning av $x = \pm 1$ och $y = \pm \frac{3}{2}$ ger därefter

$$z_1 = -1 + 2i \text{ eller } z_2 = -3 - i$$

3 p