

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2018

Utbildning: TNIU19
Modul: TEN2
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I–III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I–III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 resp. 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR4–KTR6
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, passare, gradskiva
Skrivtid: 2019-01-07, kl. 08:00–13:00

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen

$$|x + 3| - 2|x - 3| = 0$$

Svar: Studie av tre intervall ger två lösningar $x_1 = 1$ eller $x_2 = 9$

b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Svar: Successiv elimination ger $x = 1$, $y = 2$ och $z = 3$

c) Lös ekvationen

$$x^4 - 14x^3 + 65x^2 - 112x + 60 = 0$$

Svar: Exempelvis gissning av rötter, factorsatsen och polynomdivision ger

$$x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ eller } x_3 = 5 \text{ eller } x_4 = 6$$

3 p

2. Lös olikheten

$$\frac{x+6}{x-3} \geq \frac{x+6}{x+3}$$

Svar: Lika nämnare, faktorisering och teckenstudium ger $x \in [-6, -3[\cup]3, \infty[$

3 p

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a)

$$\sin x (1 + 2\cos x) = 0$$

Svar: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi$ eller $x = n\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

b)

$$\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$$

Svar: $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

c)

$$2 \lg 4x - \lg 8x = 2$$

Svar: Tredje och andra logaritmlagen ger $x = 50$

3 p

4. Låt

$$y = f(x) = 4 - e^x$$

a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

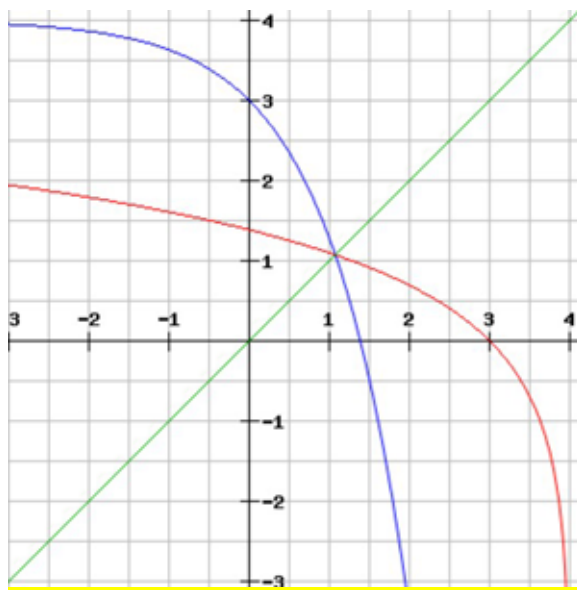
Svar: $D_f \in]-\infty, \infty[$ och $V_f \in]-\infty, 4[$

b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = \ln(4 - x)$, $D_{f^{-1}} \in]-\infty, 4[$ och $V_{f^{-1}} \in]-\infty, \infty[$

c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar: Notera att korrekt skissade grafer tydligt skall begränsas av sina definitions- och värdemängder enligt ovan...



3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Beräkna z^6 om

$$z = \sqrt{3} + i$$

Svar: Byte till polär form och de Moivres formel ger $z^6 = -64$

b) Lös ekvationen

$$z^2 + (6 + 4i)z - 20 + 12i = 0$$

Svar: Kvadratkomplettering ger $z_{1,2} = -3 - 2i \pm 5$

c) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form):

$$z^4 = -4$$

Svar: Lösning på polär form och byte till $a + bi$ ger $z_{1,2} = 1 \pm i$ eller $z_{3,4} = -1 \pm i$

3 p

6. Lös ekvationen och markera lösningen i det komplexa talplanet:

$$|z - 2 + 2i| = 3|z - 2 - 6i|$$

Svar: En cirkel med $r = 3$ och centrum i $z = 2 + 7i$ ty $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 9$

3 p