INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

# Tentamen inom Matematisk Grundkurs

*Ordinarie tentamen för kursen HT 2019*

| | |
|---|---|
| Utbildningskod: | TNIU19 |
| Modul: | TEN2 |
| Max: | 18 p |
| Betyg 3: | Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III |
| Betyg 4: | Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III |
| Betyg 5: | Minst 15 p |
| Att tänka på: | Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar |
| Hjälpmedel: | Skrivdon, linjal, passare och gradskiva |
| Skrivtid: | 2019-10-25 kl 08:00–13:00 |
| Jour: | Peter Holgersson, 0705-19 99 92 |

---

***Del I***

**1.** *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall ”Bonus” istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös olikheten

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x + 4} \geq 0$$

Svar: $x \in \,]-4, 3] \cup [7, \infty[$

b) Partialbråksuppdela

$$\frac{8x + 11}{x^2 + 3x + 2}$$

Svar: $\frac{5}{x+2} + \frac{3}{x+1}$

c) Lös ekvationen

$$|x - 3| = 2|6 - x|$$

Svar: $x_1 = 5, \; x_2 = 9$

**3 p**

**2.** Lös olikheten

$$x^2 \leq \frac{8}{x}$$

Svar: $x \in ]0, 2]$

**3 p**

***Del II***

**3.** *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$\cos x - \sin 2x = 0$$

Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \;\; x = \frac{\pi}{6} + n2\pi, \;\; x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$

b)

$$(3 - \lg x)(5 - e^x) \arccos x = 0$$

Svar: $x = 1000, \;\; x = \ln 5\,, \;\; x = 1$

c)

$$\ln \frac{x}{3} = 2 \ln 5 + \ln 8 - \ln 4$$

Svar: $x = 150$

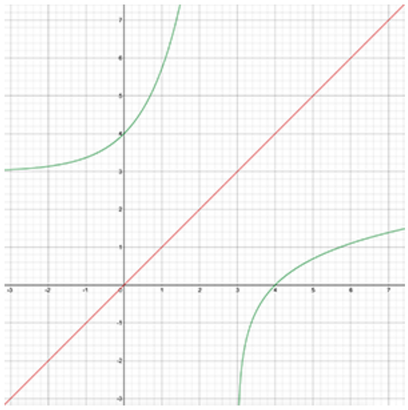
**3 p**

**4.** Funktion och invers

a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = \ln(x-3)$$

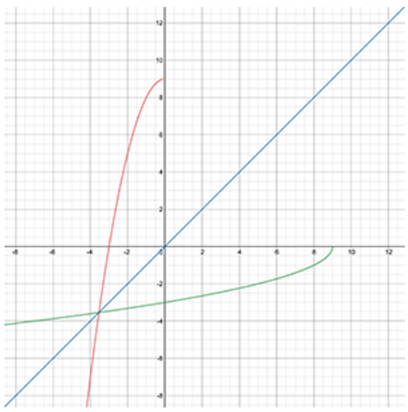
Svar: $f^{-1}(x) = e^x + 3\,,\ Df = ]-\infty, \infty[\,,\ Vf = ]3, \infty[$



b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = -\sqrt{9-x}$$

Svar: $f^{-1}(x) = 9 - x^2\,,\ Df = ]-\infty, 0]\,,\ Vf = ]-\infty, 9]$



**3 p**

*Del III*

**5.** *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Beräkna potensen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form):

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^9$$

Svar: $i$

Ledning: Byt till polär form…

b) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form):

$$z^2 + (4 + 6i)z + 12i + 4 = 0$$

Svar: $x_1 = -2 - 6i,\ \ x_2 = -2$

Ledning: Kvadratkomplettering…

c) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form):

$$z^5 - z^4 + 16z - 16 = 0$$

Svar: Fem rötter $z = 1,\ \ z = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i,\ \ z = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

Ledning: Gissa en rot, polynomdividera, lös den återstående fjärdegradsekvationen genom att övergå till polär form…

**3 p**

**6.**

a) Bestäm $V_f$ för funktionen

$$f(z) = \frac{i}{z} \quad , \quad D_f = \text{"utanför och på enhetscirkeln i 3: e kvadranten"}$$

Svar: $V_f = \text{"innanför och på enhetscirkeln i 3: e kvadranten"}$

Ledning: Studera $f(z) = \frac{i}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ och se hur absolutbeloppet och argumentet förändras…

b) Bestäm vad som händer med absolutbelopp och argument hos $z$ med funktionen

$$f(z) = \left(\sqrt{3} + i\right)z$$

Svar: Absolutbeloppet $r$ fördubblas till $2r$ och argumentet $\theta$ ökar till $\theta + \frac{\pi}{6}$

Ledning: $f(z) = \left(\sqrt{3} + i\right)z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}re^{i\theta} = 2re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$ visar hur absolutbeloppet och argumentet förändras…

c) En studiekamrat påstår att funktionen

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad , \quad D_f = \text{"högra halvplanet inklusive randen"}$$

har inversen

$$f^{-1}(z) = \frac{z+1}{-z+1} \quad , \quad D_f = \text{"innanför och på enhetscirkeln"}$$

Verkar det stämma?

Svar: Ja det stämmer; den imaginära axeln avbildas på enhetscirkeln och det högra halvplanet avbildas innanför enhetscirkeln.

Ledning:

Inversen till $w = \frac{z-1}{z+1}$ kan tas fram genom den omvända ekvationen

$$z = \frac{w-1}{w+1} \Leftrightarrow z = \frac{w+1-2}{w+1} \Leftrightarrow z = 1 - \frac{2}{w+1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow w = \frac{z+1}{-z+1}$$

Och föreslagen invers $f^{-1}(z)$ stämmer därmed.

Värdemängden till $f(z)$ måste motsvara inversen definitionsmängd…

Insättning av $a + bi$ med $a \geq 0$ (högra halvplanet) ger funktionsvärden

$$w = f(a + bi) = \frac{-1 + a + bi}{1 + a + bi}$$

vars absolutbelopp studeras:

$$|w| = \left|\frac{-1 + a + bi}{1 + a + bi}\right| = \left|\frac{(-1 + a + bi)(1 + a - bi)}{(1 + a + bi)(1 + a - bi)}\right|$$

$$= \left|\frac{-1 - a + bi + a + a^2 - abi + bi + abi + b^2}{1 + a - bi + a + a^2 - abi + bi + abi + b^2}\right|$$

$$= \left|\frac{-1 + a^2 + b^2 + 2bi}{1 + 2a + a^2 + b^2}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-1 + a^2 + b^2}{1 + 2a + a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{2b}{1 + 2a + a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 2a^2 + 2b^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{(1 + 2a + a^2 + b^2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 - a^2 + b^2)^2}}{1 + 2a + a^2 + b^2} = \frac{1 - a^2 + b^2}{1 + 2a + a^2 + b^2}$$

Man ser att för $a = 0$ (randen av definitionsmängden, den imaginära axeln) får man det önskade absolutbeloppet

$$\frac{1 + b^2}{1 + b^2} = 1$$

och därmed avbildas randen av definitionsmängden (imaginära axeln) på enhetscirkeln som blir värdemängdens rand, vilket stämmer överens med randen till inversens föreslagna definitionsmängd.

Man ser vidare att för $a > 0$ (inre punkter i det högra halvplanet) får man absolutbeloppet

$$\frac{1 - a^2 + b^2}{1 + 2a + a^2 + b^2} < 1$$

ty nämnaren är uppenbart större än täljaren för $a > 0$ och därmed avbildas ”inre punkter i högra halvplanet” på området ”innanför enhetscirkeln”.

**3 p**