INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2019

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare och gradskiva
Skrivtid:	2020-01-07 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall ”Bonus” istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös olikheten

$$x^4 - 6x^2 - 8x - 3 < 0$$

Ledning: Efter gissning av nollställen $x = 3$ och $x = -1$ samt polynomdivision med tillhörande faktorer $(x-3)$ och $(x+1)$ får man den faktoriserade olikheten $(x+1)(x+1)(x+1)(x-3) < 0$ som med teckenstudium ger svaret $x \in]-1, 3[$

b) Lös ekvationen

$$5 - x = \sqrt{7 - x}$$

Ledning: Ledvis kvadrering ger efter sortering ekvationen $x^2 - 9x + 18 = 0$ som har lösningarna $x = 3$ och $x = 6$ varav den sista stryks då den ej ger likhet.

c) Lös ekvationen

$$|x + 2| - 2|4 - x| = 0$$

Ledning: Tre fall studeras varav det vänstra fallet inte ger någon lösning, det mellersta fallet ger lösningen $x = 2$ och det högra fallet ger lösningen lösningen $x = 10$.

3 p

2. Lös olikheten

$$\frac{8}{x} \geq \frac{2}{x+3}$$

Ledning: Omskrivning med lika nämnare ger efter sortering olikheten $\frac{6x+24}{x(x+3)} \geq 0$ som efter teckenstudium ger lösningen $x \in [-4,-3[\, \cup\,]0,\infty[$

3 p

Del II

3. *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a) $(1-\tan x)(1-2\sin x) = 0$

Ledning: $\tan x = 1$ ger lösningarna $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ och $\sin x = \frac{1}{2}$ ger lösningarna eller $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$

b) $\sin 2x + \cos x = 0$

Ledning: Omskrivning och faktorisering ger ekvationen $\cos x\,(2\sin x + 1) = 0$ med lösningarna $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \frac{7\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi$

c) $2\ln x - \ln(x+30) = 0$

Ledning: Notera inledningsvis kravet $x > 0$. Omskrivning med hjälp av logaritmlag ger ekvationen $\ln x^2 = \ln(x+30)$ och i förlängningen ekvationen $x^2 - x - 30 = 0$ som har lösningar $x = 6$ eller $x = -5$ men enbart den första duger.

3 p

4. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad -\infty < x < b \\ x-4 & , \quad 5 \leq x < \infty \end{cases}$$

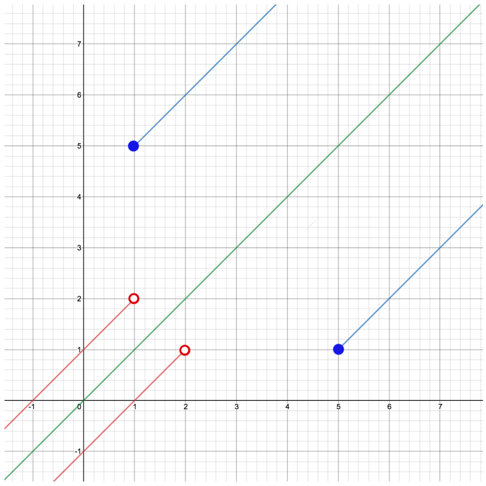
a) Bestäm det maximala värdet på b för att $f(x)$ skall kunna ha en invers $f^{-1}(x)$.

Ledning: Det maximala värdet $b = 2$ ger värdemängden $V_f =]-\infty,\infty[$ utan att samma funktionsvärde förekommer två gånger.

b) Bestäm $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitionsmängder.

Svar: $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad -\infty < x < 1 \\ x+4 & , \quad 1 \leq x < \infty \end{cases}$

c) Skissa $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem.

Svar: 

3 p

Del III

5. *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationen $z^3 = 64i$ och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form).

Ledning: Omskrivning till polär form ger lösningarna

$$z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = \cdots = 2\sqrt{3} + 2i \ , \ z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{6}} = \cdots = -2\sqrt{2} + 2i \ , \ z_2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cdots = -4i$$

b) Lös ekvationen $z^2 + (6 + 4i)z + 30 + 12i = 0$

Ledning: Kvadratkomplettering ger lösningarna

$z_1 = -3 + 3i \ , \ \ z_2 = -3 - 7i$

c) Lös ekvationen $|z - 2 + 2i| = |z - 2 - 8i|$

Ledning: Med $x = \text{Re}(z)$ och $y = \text{Im}(z)$ får man den räta linjen $y = \text{Im}(z) = 3$

3 p

6. Visa med hjälp av Eulers formler att

$$\sin^4 x = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$$

Ledning: (Uppgift 2.76 i läroboken) Utveckling med Eulers formel för $\sin x$ ger

$$VL = \sin^4 x = \cdots = \frac{e^{i4x} + e^{-i4x} - 4e^{i2x} - 4e^{-i2x} + 6e^{i0x}}{16}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + \frac{6}{16} = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8} = HL$$

3 p