INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP

Linköpings Tekniska Högskola

Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Ordinarie tentamen för kursen HT 2020

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2020-10-29 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationen

$$\sqrt{x+6} = x + 4$$

Ledning: Ledvis kvadrering ger två förslag på rötter varav $x = -2$ stämmer.

b) Lös ekvationen

$$|2 - x| = |x + 6|$$

Ledning: Omskrivning (utan absolutbelopp) ger tre fall och endast det mellersta ger en rot $x = -2$.

c) Dela upp i partialbråk

$$\frac{x - 12}{x^2 - 3x}$$

Ledning: Faktorisering av nämnaren och ansatsen $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-3}$ ger svaret $\frac{4}{x} - \frac{3}{x-3}$.

3 p

2. Lös olikheten

$$6 - 2x \geq \frac{4}{x}$$

Ledning: Förlängning till lika nämnare, nollprodukt skapas, teckenstudie ger intervallen $x \in]-\infty, 0[\cup [1, 2]$.

3 p

Del II

3. *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$\ln x^2 = \ln 36 - 2\ln 3$$

Ledning: Logaritmlagar ger $x = \pm 2$.

b)

$$\sin x = \sin 2x$$

Ledning: "Sinus för dubbla vinkeln", faktorisering till nollprodukt ger rötterna $x = n\pi$ eller $x = \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi$ för $n \in \mathbb{Z}$.

c)

$$\cos^2 x + \sin x = 1$$

Ledning: "Trigettan", faktorisering till nollprodukt (eller variabelskifte) ger rötterna $x = n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ för $n \in \mathbb{Z}$.

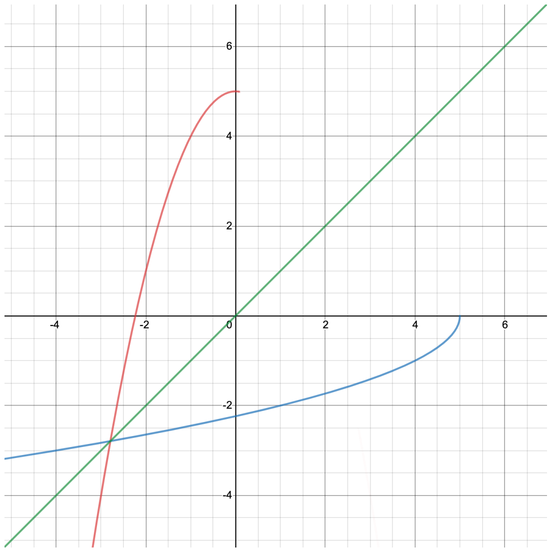
3 p

4. Funktion och invers

a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = 5 - x^2 \quad , \quad x \leq 0$$

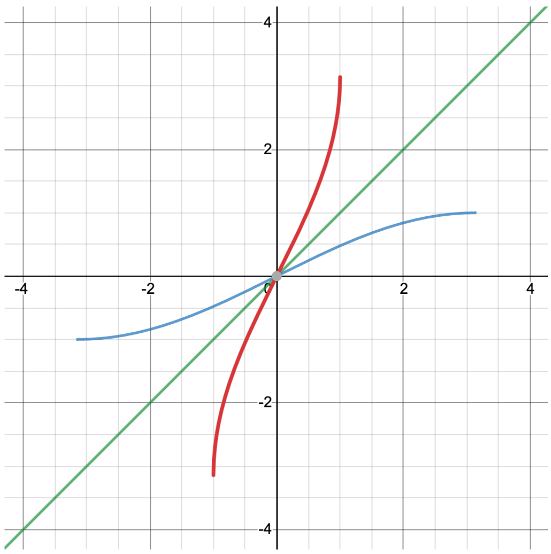
Svar: $f^{-1}(x) = -\sqrt{5-x}$ med $D_{f^{-1}} =]-\infty, 5]$ och $V_{f^{-1}} =]-\infty, 0]$.



b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ med tillhörande definitions- och värdemängd och skissa kurvorna för $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i ett gemensamt koordinatsystem om

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} \quad , \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Svar: $f^{-1}(x) = 2\arcsin x$ med $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$ och $V_{f^{-1}} = [-\pi, \pi]$.



3 p

Del III

5. *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$:

$$z^3 = 8$$

Ledning: Omskrivning till polär form, potensregler (de Moivre) och tillbaka till formen $a + bi$ ger de tre rötterna $x = 2$ eller $x = -1 \pm \sqrt{3}i$.

b) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$:

$$z^4 - 5z^2 - 36 = 0$$

Ledning: Variabelskifte $t = z^2$ ger de fyra rötterna (två reella och två ickereella rent imaginära) $z = \pm 3$ eller $z = \pm 2i$

c) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$:

$$2z + \bar{z} + 5i + 24 = 0$$

Ledning: Omskrivning med $z = a + bi$ och $\bar{z} = a - bi$ ger en förstagradsekvation som kräver att $a = -8$ och $b = -5$ så att $z = -8 - 5i$

3 p

6. Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$:

$$z^2 + (4 - 6i)z - 17 + 4i = 0$$

Ledning: Kvadratkomplettering ger efter förenkling $(z + 2 - 3i)^2 = 12 - 16i$ och genom att ersätta $z + 2 - 3i$ med $a + bi$ får man ekvationssystemet

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 20 \\ a^2 - b^2 = 12 \\ 2ab = -16 \end{cases}$ med lösningen $\begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \mp 2 \end{cases}$ så att $z + 2 - 3i = \pm 4 \mp 2i$ vilket ger

$z = 2 + i$ eller $z = -6 + 5i$

3 p