INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP

Linköpings Tekniska Högskola

Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2020

Utbildningskod:	TNIU19
Modul:	TEN2
Max:	18 p
Betyg 3:	Minst 9 p och samtidigt minst 2 p per avsnitt I-III
Betyg 4:	Minst 12 och samtidigt minst 3 p per avsnitt I-III
Betyg 5:	Minst 15 p
Att tänka på:	Fullständiga lösningar/resonemang och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare och gradskiva
Skrivtid:	2021-01-04 kl 08:00–13:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. *Vid betyg G på KTR4 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -20 \\ 2x + 3y - z = 13 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Ledning: Radoperationer (Gauss-eliminering) ger svaret $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$

b) Lös olikheten

$$x^2 - 10x + 21 > 0$$

Ledning: Teckenstudie av nollprodukt ger svaret : $x > 7$ eller $x < 3$

c) Bestäm det bråk som har decimalutvecklingen

$$0{,}2141414\ldots = 0{,}2\overline{14}$$

Ledning: Se exempel 1.1.2.1 i kurshäftet med svaret $\frac{106}{495}$

3 p

2. Lös olikheten

$$|x-3|-|7-x|>0$$

Ledning: Tre fall studeras och man får $x \in]5,7] \cup [7,\infty[=]5,\infty[$

3 p

Del II

3. *Vid betyg G på KTR5 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a)

$$\ln x^3 = \ln 48 - \ln 2 - \ln 3$$

Ledning: Högerledet kan skrivas om enligt

$\ln 48 - \ln 2 - \ln 3 = \ln 24 - \ln 3 = \ln 8$ så att $x^3 = 8$ och $x = 2$.

b)

$$\sin x\,(1-2\cos x) = 0$$

Ledning: Ekvationen är redan en nollprodukt och faktorerna nollställs med

$x = \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi$ eller $x = n\pi$ med $n \in \mathbb{Z}$

c)

$$\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$$

Ledning: Substitution $t = \sin x$ ger en andragradsekvation $t = 1$ eller $t = \frac{1}{2}$ så att

$x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ med $n \in \mathbb{Z}$

3 p

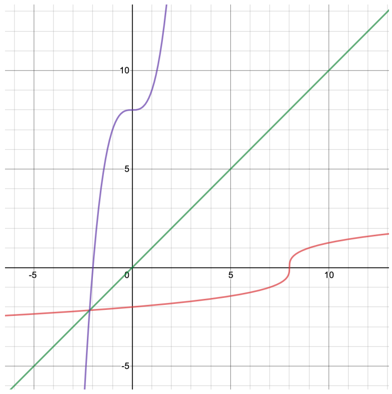
4. Låt $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$

a) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = x^3 + 8$ med $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ och $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

b) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Ledning: Enklast är att skapa värdetabell för $f^{-1}(x) = x^3 + 8$, skissa dess kurva och sedan spegla den för kurvan $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$.



Del III

5. *Vid betyg G på KTR6 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna och svara på formen $a + bi$

a)

$$3z^4 = -12$$

Ledning: Omskrivning med komplex exponentialfunktion och De Moivres formel ger $z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{4}\right)}$ med $n \in$, efter omskrivning $z_{1,2} = 1 \pm i$ eller $z_{3,4} = -1 \pm i$

b)

$$z^2 + (2+2i)z + 9 + 2i = 0$$

Ledning: Kvadratkomplettering ger $z = -1 + 2i$ eller $z = -1 - 4i$

c)

$$4z - 12 = 3\bar{z} + 28i$$

Ledning: Omskrivning med $z = a + bi$ och $\bar{z} = a - bi$ ger en förstagradsekvation som kräver att $a = 12$ och $b = 4$ så att $z = 12 + 4i$

3 p

6.

a) Visa med hjälp av Eulers första formel att

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Ledning: Addition av $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ och konjugatet $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ ger efter omskrivning sambandet ovan.

b) Visa med hjälp av sambandet ovan att

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

Ledning: Utveckling av vänsterledet enligt

$$(\cos x)^4 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = -\frac{1}{16}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

ger efter utveckling och omskrivning

$$\frac{6}{16}e^{i0x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

vilket stämmer med högerledet

3 p